

## Pięciogodzinówka przed drugim etapem - wersja 1

Dzień 2

4. Mały Kubuś nie lubi matematyki i jest dręczony przez swojego korepetytora. Zajęcia z korepetytorem wyglądają następująco. Najpierw korepetytor pisze na tablicy równanie kwadratowe  $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ , a Kubuś musi znaleźć jego rozwiązania  $p_2$  i  $q_2$ . Jeśli nie istnieją lub przynajmniej jedno nie jest całkowite, to Kubuś może iść do domu, w przeciwnym razie korepetytor zapisuje na tablicy równanie  $x^2 + p_2x + q_2 = 0$  (dobierając dowolną kolejność rozwiązań) i wszystko zaczyna się od początku (jeśli równanie ma tylko jedno rozwiązanie traktujemy je jako dwa takie same). Znaleźć wszystkie początkowe pary  $p_1, q_1$  dla których korepetytor może dręczyć Kubusia w nieskończoność.

5. W trójkącie  $ABC$  punkt  $O$  jest środkiem okręgu opisanego, zaś  $M$  środkiem ciężkości, przy czym proste  $OM$  i  $AM$  są prostopadłe. Prosta  $AM$  przecina okrąg opisany na trójkącie  $ABC$  w  $A'$ , zaś proste  $A'B$  i  $A'C$  przecinają odpowiednio  $AC$  i  $AB$  w  $D$  i  $E$ . Pokazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie  $ADE$  leży na okręgu opisanym na trójkącie  $ABC$ .

6. W rzędzie ustawiono 2005 kamieni, każdy z nich w kolorze białym lub czarnym, a następnie dla każdego policzono sumę liczby pionków białych stojących na lewo od niego i czarnych stojących na prawo. Okazało się, że tylko jeden z wyników powtórzył się nieparzystą liczbę razy. Jaki mógł to być wynik?