

Pięciogodzinówka przed drugim etapem - wersja 1

Dzień 1

1. *Statkiem* nazywamy spójną figurę złożoną z pól szachownicy połączonych wspólnymi bokami. Pokazać, że jeśli liczba możliwych *statków* złożonych z n pól szachownicy 10×10 jest nieparzysta, to n jest podzielne przez 4.

2. Dany jest okrąg γ oraz prosta l z nim rozłączna. Odcinek AB jest średnicą okręgu γ przy czym prosta AB jest prostopadła do l zaś B leży bliżej l niż A . Punkt C jest dowolnym punktem okręgu γ różnym od A i B . Prosta AC przecina prostą l w punkcie D zaś E jest punktem styczności stycznej do γ przeprowadzonej przez D , leżącym po tej samej stronie prostej AC co B . Prosta BE przecina prostą l w F zaś prosta AF okrąg γ ponownie w G . Pokazać, że punkt symetryczny do G względem prostej AB leży na prostej FC .

3. Pokazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c sumujących się do 1 zachodzi nierówność:

$$a(1 + 2a + bc)^{\frac{3}{2}} + b(1 + 2b + ca)^{\frac{3}{2}} + c(1 + 2c + ab)^{\frac{3}{2}} \geq \frac{64}{27}$$