**Rozwiązania**

**1.** (by Chuck Norris)
Oznaczmy nasze liczby poprzez $a, b, c, d$, mamy więc równania:

$$\begin{cases} a + bcd = 2 \\ b + acd = 2 \\ c + abd = 2 \\ d + abc = 2 \end{cases}$$

Najpierw załóżmy, że któraś z liczb jest równa 0, bez szkody na ogólności $a$. Wówczas mamy, że $b = 2$, $c = 2$, $d = 2$, więc i $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2$, to trochę sprzeczność. Więc żadna z liczb nie może być zerem. Weźmy pierwsze dwa równania i odejmijmy stronami. Uzyskujemy wówczas:

$$a - b + bcd - acd = 0$$

$$(a - b)(cd - 1) = 0$$

Mamy więc, że $a$ i $b$ są równe lub $c$ i $d$ są nawzajem swoimi odwrotnościami - bo tylko wtedy $cd = 1$. Analogicznie rozumując dla każdej pary równań mamy, że dla każdej pary liczb albo są one równe albo pozostałe dwie są swoimi odwrotnościami. Załóżmy, że wśród tych liczb są dwie które nie są ani swoimi odwrotnościami ani nie są równe, bez szkody na ogólnoŚci są to $a$ i $b$. Wówczas z tego, co właśnie powiedzilišmy $c$ i $d$ są zarówno swoimi odwrotnościami jak i są równe, więc $c = \frac{1}{c}$, czyli $c^2 = 1$, czyli $c$ i $d$ są albo jedynkami albo minus jedynkami. Załórmy, że jedynkami. wówczas mamy równania $a + b = 2$ i $ab = 1$, czyli $a$ jest odwrotnością $b$, czyli mamy sprzeczność z założeniem o nie byciu swoją odwrotnością $a$ i $b$. Załóżmy, że minus jedynkami. Wówczas mamy równania $a + b = 2$ i $ab = -3$. Więc $b = -\frac{3}{a}$ i wstawiając to do pierwszego mamy, że $a - \frac{3}{a} = 2$, czyli $a^2 - 2a - 3 = 0$ (bo $a \neq 0$), czyli $(a + 1)(a - 3) = 0$. Zatem rozwiązaniami tutaj są $a, b$ równe 3 i $-1$, więc czwórką spełniającą żądane warunki są trzy $-1$ i 3. Teraz załóżmy, że dla każdej pary liczb z $a, b, c, d$ liczby w parze są równe lub są swoimi odwrotnościami. Wówczas wszystkie te liczby są albo równe $a$ albo są odwrotnościami $a$. Załóżmy najpierw, że wszystkie są równe $a$, więc mamy równanie $a^3 + a = 2$, czyli $a^3 + a - 2 = 0$, czyli $(a - 1)(a^2 + a + 2) = 0$. Zauważmy, że $a^2 + a + 2 = (a + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0$, więc iloczyn może być równy 0 tylko gdy $a$ jest równe 1. Mamy więc rozwiązanie w postaci czterech jedynek. Teraz załóżmy, że trzy z liczb są równe $a$ zaś jednak $\frac{1}{a}$. Mamy więc równania: $a + a^2 \cdot \frac{1}{a} = 2$, więc $a = 1$ i mamy znów to samo rozwiązanie. Teraz załóżmy, że dwie z liczb są równe $a$ zaś dwie $\frac{1}{a}$. Wówczas mamy równanie $a + \frac{1}{a} = 2$, czyli $a^2 - 2a + 1 = 0$, czyli $(a - 1)^2 = 0$, czyli znów mamy rozwiązanie w postaci czterech jedynek. I ostatni przypadek, gdy jest jedno $a$ i trzy $\frac{1}{a}$, mamy $\frac{1}{a} + \frac{1}{a} = 2$, czyli znów $a = 1$. Zatem rozważywszy wszystkie przypadki mamy dwie czwórki: trzy $(-1)$ i 3 oraz same 1.

**2.** (by Maciej Zdanowicz)

Zauważmy, że z tw. Ptolemeusza w czworokącie $BCEA$ zachodzi nierówność $BC \cdot AE + AB \cdot CE \geqslant BE \cdot AC$, która korzystając z założeń o bokach sześciokąta jest równoważna nierówności $\frac{AB}{BE} \geqslant \frac{AC}{AE+CE}$. Zapisując analogiczne nierówności dla czworokątów $CDEA$,$EFAC$ i dodając je stronami otrzymujemy:

$$\frac{AB}{BE} + \frac{CD}{DA} + \frac{EF}{FC} \geqslant \frac{AC}{AE+CE} + \frac{CE}{AC+AE} + \frac{AE}{AC+CE}$$

Po przyjęciu oznaczeń $x = AC$,$y = AE$,$z = CE$, mamy pokazać, że:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}$$

Dowód tej nierówności jest już prosty, chociażby przez domnożenie stronami przez $x(y+z) + y(x+z) + z(x+y)$ i zastosowanie nierówności Schwarza.

**3.** (by Chuck Norris)

(w całym rozwiązaniu $g$ jest BARDZO BARDZO DUŻE) Oznaczmy $a = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_g^{s_g}$ oraz $b = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_g^{t_g}$. Wówczas w naszym równaniu współczynniki przy $p_i$ obu stron muszą być równe dla każdego $i$, więc zachodzi dla każdego $i$:

$$s_i \cdot b = t_i \cdot ka$$

Czyli:

$$\frac{s_i}{t_i} = \frac{ka}{b}$$

Oznaczmy $\frac{ka}{b} = \frac{p}{q}$, gdzie $p \perp q$. Wówczas istnieje taka liczba $c = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_g^{u_g}$, że $a = c^p$ i $b = c^q$ - bo po prostu dla każdego $i$ $u_i = NWD(s_i, t_i)$, zaś jako, że stosunek $s_i$ i $t_i$ jest stały równy $\frac{p}{q}$ to po przemnożeniu $u_i$ przez $p$ i $q$ uzyskamy odpowiednio $s_i$ i $t_i$. Teraz będziemy poszukiwali jedynie rozwiązań w których $p = 1$. Wówczas mamy, że:

$$\frac{1}{q} = k \cdot \frac{p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_g^{u_g}}{p_1^{qu_1} p_2^{qu_2} \dots p_g^{qu_g}}$$

$$k = \frac{p_1^{(q-1)u_1} p_2^{(q-1)u_2} \dots p_g^{(q-1)u_g}}{q}$$

$$k = \frac{(p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_g^{u_g})^{q-1}}{q}$$

Musimy pokazać, że istnieje $k$ dla którego to równanie ma dowolnie dużo rozwiązań - wówczas z tych rozwiązań da się wyprowadzić liczby $a$ i $b$, które spełniają warunki zadania. Niech teraz $k = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_g^{r_g}$ i chcemy znaleźć współczynniki $r_i$. Będziemy rozpatrywali jedynie rozwiązania w których $q-1$ jest pierwsze. Niech zbiór $q_1, q_2, \dots, q_N$ gdzie $N$ jest bardzo duże będzie zbiorem takich różnych $q_i$, że $q_i - 1$ jest pierwsze. Teraz chcemy znaleźć takie współczynniki $r_i$, aby $kq_i$ było $q_i$-tą potęgą liczby naturalnej - wtedy znajdziemy $k$ mające dowolnie dużo rozwiązań równania $k = \frac{(p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_g^{u_g})^{q-1}}{q}$. Niech rozkładem na czynniki pierwsze $q_i$ będzie $q_i = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_g^{f_g}$. Wówczas współczynniki $r_i$ muszą spełniać kongruencje $r_j + f_j \equiv 0 (mod (q_i - 1))$ dla każdego $j$-ta. Zapisując taki układ kongruencji dla każdego $i$ uzyskujemy dla każdego współczynnika $r_j$ układ $N$ kongruencji opisujących jego zachowanie modulo kolejne $q_i - 1$. A ponieważ założyliśmy, że $q_i - 1$ są pierwsze, a więc parami względnie pierwsze, z Chińskiego Twierdzenia o Resztach możemy zawsze dobrać w odpowiednim przedziale takie $r_j$, więc możemy znaleźć $k$, dla którego równanie $k = \frac{(p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_g^{u_g})^{q-1}}{q}$ ma $N$ różnych rozwiązań. Cofając się do zmiennych $a, b$ z równań wynika, że w ten sposób uzyskujemy $N$ różnych rozwiązań równania danego w zadaniu, więc mogę dobrać takie $k$, aby było ich co najmniej 2005.

**4.** (by Maciej Zdanowicz)

Z łatwością zauważamy, że wszystkie wielomiany postaci $P(x) = x^n$ i wielomian zerowy spełniają warunki zadania. Załóżmy w takim w takim razie, że $P(x)$ nie jest równe $c \cdot x^n$, czyli ma pierwiastek zespolony $\epsilon$ o module większym od 0. Niech $\epsilon$ ma największy moduł spośród pierwiastków $P$. Z danej w zadaniu równości, przepisanej dla $y = x - 1$, otrzymujemy:

$$P(y)P(y+2) = P(y(y+2))$$

Z równości wyjściowej przepisanej dla $y = x + 1$ dostajemy za to:

$$P(y-2)P(y) = P(y(y-2))$$

Z powyższych dwóch nierówności wnioskujemy, że jeśli $\alpha$ jest pierwistkiem $P$ to jest nim również $\alpha(\alpha-2)$ oraz $\alpha(\alpha+2)$. Stosując poprzednie wnioski dla $\alpha = \epsilon$ wiemy, że liczby $\epsilon(\epsilon-2)$ i $\epsilon(\epsilon+2)$ są pierwiastkami $P$. Jednak rysując okrąg liczb o module $\epsilon$ zauważamy, że ktoraś z nich ma moduł większy. Co jest sprzeczne z definicją $\epsilon$. W związku z tym jedynymi wielomianami spełniającymi warunki zadania mogą być wielomiany $P(x) = c \cdot x^n$. Wówczas wstawiając do początkowego wzoru $c \cdot (x-1)^n \cdot c \cdot (x+1)^n = c \cdot (x^2-1)^n$, czyli dla każdego $x$ zachodzi $c^2(x^2-1)^n = c(x^2-1)^n$, więc $c = 0$ lub $c = 1$ co daje nam rozwiązanie w postaci wielomianu zerowego i wielomianów postaci $x^n$.

**5.** (by Chuck Norris)

Lemat.1.

Jeśli $A = x+y$ oraz $0 < A < \pi$ to dla każdej liczby rzeczywistej $k$ istnieje rozwiązanie równania $k = \frac{\sin x}{\sin y}$, to istnieje ono co najwyżej jedno.

Dowód:

Wystarczy pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{\sin x}{\sin A - x}$ jest różnowartościowa, więc wystarczy pokazać, że jest rosnąca. Zauważmy, że:

$$f'(x) = \frac{\cos x \sin(A-x) + \sin x \cos(A-x)}{\sin^2(A-x)} = \frac{\sin A}{\sin^2(A-x)}$$

Zatem pochodna jest dodatnia, więc funkcja różnowartościowa c.k.d.l.

Dowód zadania:

Oznaczmy $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$ i $\angle FED = \angle CED = \beta$. Zauważmy, że z kątów przyległych $\angle AEF = \pi - 2\beta$, z sumy miar kątów w trójkącie $\angle AFE = 2\beta - 2\alpha$ i z kąta zewnętrznego $\angle ADE = \beta - \alpha$. Zatem używając twierdzenia sinusów w trójkątach $AEF$ i $AED$ mamy, że

$$FE = AE \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha)} = ED \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\beta - 2\alpha)} = ED \frac{\cos\alpha}{\cos(\beta-\alpha)} = ED \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\beta+\alpha)}$$

Więc z tw. sinusów dla trójkąta $FED$:

$$\frac{\sin\angle EDF}{\sin\angle EFD} = \frac{FE}{ED} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\beta+\alpha)}$$

Zauważmy zaś, że z sumy miar kątów w trójkącie mamy, że $\angle EDF + \angle EFD = \pi - \beta$ zaś $\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \beta + \alpha = \pi - \beta$ także. Zatem kąty $\frac{\pi}{2} - \alpha$ i $\frac{\pi}{2} - \beta + \alpha$ są rozwiązaniem równania $\frac{\sin\angle EDF}{\sin\angle EFD} = \frac{FE}{ED} = k$, więc z lematu wynika, że jedynym możliwym. Zatem $\angle EDF = \frac{\pi}{2} - \alpha$, zatem $\angle EDB = \alpha$ c.n.d.

**6.** (by Chuck Norris)

Niech wiersze i kolumny będą odpowiednio prostymi równoległymi do osi OX i OY o przechodzącymi przez punkty kratowe. W rozwiązaniu będziemy rozważali tylko te wiersze i kolumny w których występują miejsca do posadzenia kwiatków, oczywiście jest ich skończenie wiele. Teraz dodajmy jeszcze jeden wiersz i jedną kolumnę i nazwijmy je superwierszem i superkolumną. W tych super będą miejsca na kwiatki w tych miejscach w których te super przecinają się z odpowiednio kolumnami i wierszami o nieparzystej liczbie miejsc na kwiatki. Dodatkowo na przecięciu superwiersza i superkolumny umieszczamy miejsce na kwiatka tak lub nie w taki sposób, aby liczba miejsc w superrzędach była parzysta - możemy tak zawsze zrobić, bo parzystość liczby kwiatków w superwierszu i superkolumnie jest równa parzystości liczby wszystkich innychmiejsc na kwiatki, więc przed dodaniem parzystość tych liczb jest taka sama, więc dodajemy jedno miejsce tylko jeśli jest nieparzysta. Zauważmy, że w nowym układzie punktów w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest parzyście wiele miejsc na kwiatki, więc teraz pokażemy, że da się tak usadowić kwiatki, aby liczby goździków i róż w każdym wierszu i w każdej kolumnie była takie same. Następnie w czasie powrotu z tego układu do początkowego z każdego wiersza i z każdej kolumny wyrzucę co najwyżej jednego kwiatka, więc na każdej prostej liczba goździków i róż będzie się różniła co najwyżej o 1. Zatem do dzieła: Niech interesujących wierszy będzie $n$ zaś kolumn $m$. Skonstruujmy więc macierz $m \times n$ w której na danym polu o współrzędnych $i, j$ będzie 1, jeśli na skrzyżowaniu $i$-tej kolumny i $j$-ego wiersza jest miejsce na kwiatka, 0 w przeciwnym razie. Skonstruujmy teraz graf dwudzielny w którym po jednej stronie jest $m$ wierzcholków reprezentujących kolumny, po drugiej $n$ reprezentujących wiersze, zaś połączenie wierzchołków krawędzią oznacza, że na przecięciu odpowiedniego wiersza i kolumny jest 1, czyli miejsce na kwiatka. Teraz nasza teza sprowadza się do przyporządkowania krawędziom kwiatków tak, aby dla każdego wierzchołka liczba wychodzących krawędzi 'goździkowych' była równa liczbie 'różanych' zaś wiemy, że stopień każdego wierzchołka jest parzysty. Robimy to następująco: bierzemy jakikolwiek wierzchołek po lewej stronie i przechodzimy jakąś krawędzią na prawo, następnie spowrotem na lewo inną itd. kolejno oznaczając na przemian krawędzie jako 'goździkowe' i 'różane'. W momencie dojścia do wierzchołka z którego zaczęliśmy zamykamy cykl (który ma parzystą długość) i wyrzucamy go z grafu. Postępujemy tak aż w grafie nie będzie krawędzi. Zauważmy, że do każdego wierzchołka jeśli wchodzimy to od razu wychodzimy, więc liczba wyrzuconych krawędzi każdego wierzchołka zawse jest parzysta, więc parzystość stopni wierzchołków się nie zmienia. Jednocześnie z tego samego powodu zawsze możemy z wierzchołka wyjść, więc nasze tworzenie cyklu zawsze się skończy (najwyżej wykorzystamy wszystkie krawędzie). Także wśród wyrzucancyh krawędzi dokładnie połowa jest 'goździkowa' a połowa 'różana' (bo wchodzimy jedną a wychodzimy drugą), więc po zakoćzeniu całej procedury uzyskamy takie dopasowanie kwiatów do krawędzi o jakie nam chodziło, więc cofając to rozumowanie Hofman może odpowiednio posadzić swoje kwiatki.