Rozwiązania

1.1. (by Olek Gajewski)

Przyjmijmy $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$.
Wówczas $\frac{n}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}} = k < p_n$
$n = k(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_{n-1}}) + \frac{k}{p_n}$
$\frac{np_n-k}{p_n} = \frac{k(p_2p_3\ldots p_{n-1}+p_1p_3\ldots p_{n-1}+\cdots+p_1p_2\ldots p_{n-2})}{p_1p_2\ldots p_{n-1}}$
Lewa strona jest wymierna, ale nie całkowita. Zatem prawa strona w myśl założenia też powinna być niecałkowita. Ale ponieważ mianowniki obu stron sa względnie pierwsze - nie może zachodzić równość.

6.1 (by Chuck Norris)

Zauważmy, że $(a-b)^2 = 0$, czyli $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, czyli $4a^2 + 4b^2 + 4ab \geqslant 3a^2 + 3b^2 + 6ab$, czyli $a^2 + b^2 + ab \geqslant \frac{3}{4}(a+b)^2$. Analogicznie zapisując, dla b, c i a, c mamy, że:

$$a\sqrt{b^2 + c^2 + bc} + b\sqrt{c^2 + a^2 + ca} + c\sqrt{a^2 + b^2 + ab} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(a(b+c) + b(a+c) + c(a+b)) = \sqrt{3}(ab + bc + ca)$$

c.n.d.

2.CN. (by Chuck Norris)

Zapisując twierdzenia Ptolemeusza dla czworokątów $ABCE$, $CDEA$, $EFAB$ mamy, że:

$$AB \cdot CE + BC \cdot AE \geqslant BE \cdot AC$$

$$CD \cdot EA + DE \cdot CA \geqslant DA \cdot CE$$

$$EF \cdot AC + FA \cdot EC \geqslant FC \cdot EA$$

czyli, ponieważ $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$:

$$\frac{BC}{BE} \geqslant \frac{AC}{CE + AE}$$

$$\frac{DE}{DA} \geqslant \frac{CE}{AE + AC}$$

$$\frac{FA}{FC} \geqslant \frac{EA}{AC + CE}$$

Więc oznaczając $AC = a$, $CE = b$, $EA = c$, mamy, że:

$$\frac{AB}{BE} + \frac{CD}{DA} + \frac{EF}{FC} \geqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

Teraz zauważmy, że szacując średnią arytmetyczną i harmoniczną:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{2a+2b+2c}{3}\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{2}\frac{3}{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}}\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 =$$

$$= \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

Czyli:

$$\frac{AB}{BE} + \frac{CD}{DA} + \frac{EF}{FC} \geqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

c.k.d.

5.CN. (by Maciej Zdanowicz)

Niech G będzie punktem przecięcia prostych EF i BC. Zauważmy, że na odcinku AB istnieją dwa punkty X, Y spełniające równości $|DX| = |DY| = |DF|$. Z równoramienności trójkąta BEG wynika, że jednym z nich jest obraz F w symetrii osiowej względem DE (X), a drugim obraz tegoż punktu w symetrii osiowej względem AD - dwusiecznej $\angle A$ (Y). Opiszmy teraz okrąg ω na trójkącie DFA. Niech jego drugim przecięciem z bokiem AB będzie F'. Z faktu, że AD jest dwusieczną $\angle A$ wynika, że $|DF'| = |DF|$, czyli $F' = X$ lub $F' = Y$. Ponieważ czworokąt $AYCF$ jest deltoidem, nie można na nim opisać okręgu, czyli $F' = X$. W takim razie ω jest opisany na równoramiennym trójkącie DFF', symetrycznym względem DE a co za tym idzie jest styczny do prostej BC. Korzystając teraz z tw. o stycznej i cięciwie dostajemy równość $\angle FDC = \angle DAC$, równoważną tezie zadania.