Pięciogodzinówka przed drugim etapem, werszyn Chuck Norris visiting China

luty 2006, dzień 1.

1. Pokazać, że dla każdego k całkowitego dodatniego istnieje takie n całkowite dodatnie, że równanie:

$$x_1^5 + x_2^6 + x_3^7 + x_4^8 + x_5^9 + x_6^{10} + x_7^{11} + x_8^{12} = n$$

ma przynajmniej k rozwiązań w ciągach liczb całkowitych dodatnich $(x_1, x_2, \ldots, x_8)$.

2. Wypukły sześciokąt $ABCDEF$ w którym przeciwległe boki są równoległe, ma obwód p, zaś promienie okręgów opisanych na trójkątach FAB,BCD,DEF wynoszą odpowiednio R_A, R_C, R_E. Pokazać, że:

$$R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{p}{2}$$

3. Permutację $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ nazywamy dobrą jeśli dla co najmniej jednego $i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ zachodzi $|x_i - x_{i+1}| = n$. Pokazać, że dla każdego n całkowitego dodatniego jest więcej dobrych permutacji niż pozostałych.