Pięciogodzinówka przed drugim etapem 2

styczeń 2006, dzień 1.

1. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele takich m całkowitych dodatnich, że dla każdego n całkowitego dodatniego liczba $n^4 + m$ jest złożona.

2. W czworokącie $ABCD$ boki AB i CD są równoległe. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Punkt F jest ortocentrum trójkąta EBC, punkt G jest ortocentrum trójkąta EAD. Udowodnić, że środek odcinka GF leży na prostej przechodzącej przez E i prostopadłej do AB.

3. Funkcja f przyjmująca argumenty całkowite nieujemne spełnia warunki:

- $f(0) = 0$
- $f(4k+3) = f(4k) = f(k)$
- $f(4k+1) = f(k) + 1$
- $f(4k+2) = f(k) - 1$

dla każdego k całkowitego nieujemnego. Znaleźć liczbę rozwiązań równania $f(x) = 0$ w zbiorze liczb $\{0, 1, 2, \ldots, 4^n - 2, 4^n - 1\}$.