Rozwiązania

1. (by Robert Pałuba)
Wykażemy, że wszystkie liczby postaci $n^4 + 4k^4$ dla $k \geqslant 2$ są złożone.
Zauważmy, że:

$$n^4 + 4k^4 = (n^2 + 2kn + 2k^2)(n^2 - 2kn + 2k^2)$$

Zatem rzeczywiście liczba $n^4 + 4k^4$ jest złożona, bo jest iloczynem dwóch liczb równych co najmniej 4, bo $n^2 + 2kn + 2k^2 \geqslant k^2 \geqslant 4$ i $n^2 - 2kn + 2k^2 = (n-k)^2 + k^2 \geqslant k^2 \geqslant 4$.

Wynika z tego, że wszystkie m postaci $4k^4$ dla $k \geqslant 2$ spełniają warunki zadania.

2. (by Olek Gajewski)
Przypadek przekątnych prostopadłych jest oczywisty ($F = G = E$).

W przeciwnym wypadku:
Oznaczmy przez k prostą prostopadłą do AB przechodzącą przez E. Wystarczy pokazać, że proste CF i DG oraz k przecinają się w jednym punkcie (np. X) - bo wówczas w analogiczny sposób pokażemy, że BF, AG i k przecinają sie w Y - a zatem otrzymamy równoległobok $XGYF$ i zajdzie teza, gdyż przekątne równoległoboku przecinają się w połowie.

Na początek oznaczmy poprzez X przecięcie DG i k. Poprowadźmy prostą l równoległą do AB przez X.

Udowodnienie tezy zadania sprowadza sią do udowodnienia faktu:

> Dla trójkąta ABC i spodku wysokości H (spuszczonej z C); proste przechodzące przez H prostopadłe do odpowiednio BC, AC przecinają odpowiednio AC i BC w punktach P i Q, takich, że $PQ||AB$.

Bo wtedy lemat ten stosujemy do trójkąta wyciętego z kąta ZEB przez prostą l oraz spodka wysokości X - i wtedy C i D to nasze domniemane punkty P i Q.
Dowód faktu:

> Rozwiązanie przeprowadzimy, zakładając, że kąt ACB jest rozwarty i punkty P, Q wówczas leżą bliżej punktu C niż A i B odpowiednio - w przeciwnym razie rozwiązanie jest analogiczne. Oznaczmy:
>
> - $E = HP \cap BC$,
> - $F = HQ \cap AC$,
> - $\angle BAC = \alpha$,
> - $\angle ABC = \beta$
>
> 1. Na $CFHE$ można opisać okrąg - gdyż $\angle HFC = \angle HEC = 90$.
> 2. Zachodzą następujące równości kątów:
>
> - $\angle BAC = \angle FHC = \angle FEC = \angle FEQ$,
> - $\angle ABC = \angle EHC$,
> - $\angle APH = \angle BQF = 90° - \alpha - \beta$ (bo suma kątów w trójkącie wynosi 180°)
>
> Zatem na czworokącie $PQFE$ można opisać okrąg - a zatem $\angle QPF = \angle FEQ = \angle BAC$
> Czyli proste AB i PQ są równoległe - CBDU.

3. (by Michał Pilipczuk)

Zauważmy, że jeśli w zapisie binarnym liczby na końcu występuje 00 lub 11, to funkcja ignoruje to i przyporządkowuje taką samą wartość, jakby tej końcówki nie było. Natomiast jeśli występuje 10 lub 01 to odpowiednio dodaje lub odejmuje 1. Zauważmy, że dodawanie 1 występuje, gdy mamy jedynkę na miejscach o pewnej parzystości, zaś odejmowanie, gdy mamy na tej drugiej. Zatem funkcja po prostu zlicza różnicę liczb jedynek w liczbie na miejscach o różnych parzystościach. Liczby x, dla których $f(x) = 0$ mają zatem równą liczbę jedynek na miejscach parzystych i nieparzystych (jakkolwiek to liczyć).Zatem liczba x z przedziału od 0 do $2^{2n} - 1$ ma n miejsc parzystych i n nieparzystych. Zakładając, że na każdym z nich ma być k jedynek, liczba możliwości będzie równa $\binom{n}{k}^2$ bo z każdego z dwóch zbiorów n miejsc wybieram k na których będą jedynki. Musimy zatem przesumować po k: nasz wynik będzie równy $S = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. Ale $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, więc $S = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$. Rozpatrzmy zatem dwa zbiory n elementów: z jednego wybieramy k a z drugiego $n - k$ elementów. Równie dobrze moglibyśmy z sumy tych dwóch zbiorów wybrać n elementów i jednoznacznie podzielić je na k z pierwszego zbioru i $n - k$ z drugiego a tych wyborów jest $\binom{2n}{n}$. Więc $S = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, więc taki jest wynik naszego zadania.

4. (by Łukasz Mazurek)

$$a+b+c+d=0$$

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=p$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{abc+bcd+cda+dab}{abcd}=0 \Leftrightarrow abc+bcd+cda+dab=0$$

$$abcd=1$$

Znając wzory Viete'a rozważmy wielomian pomocniczy:

$$W(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=x^4+0x^3+px^2+0x+1=x^4+px^2+1$$

$$=(x^2-\frac{-p-\sqrt{p^2-4}}{2})(x^2-\frac{-p+\sqrt{p^2-4}}{2})$$

Żeby wielomian ten miał 4 rzeczywiste pierwiastki a, b, c, d, wyrażenia pod znakiem pierwiastka muszą być nieujemne, więc musi być:

$$p^2-4 \geqslant 0$$

$$|p| \geqslant 2$$

5. (by Łukasz Mazurek)

Niech $x+y=AB, y+z=BC, z+x=CA$, a r będzie promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Przyrównując wzory „*pr*” i „Herona” na pole trójkąta ABC otrzymujemy:

$$(x+y+z)r = \sqrt{(x+y+z)xyz}$$
$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$

Odcinek IM policzymy z tw. Pitagorasa dla trójkąta stworzonego m.in. przez promień okręgu wpisanego poprowadzony do AB:

$$IM = \sqrt{r^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z} + \frac{(x-y)^2}{4}}$$

Zadanie sprowadza się więc do udowodnienia nierówności:

$$\sqrt{\frac{4xyz}{x+y+z} + (x-y)^2} \geqslant (x+y)\sqrt{1 - \frac{2(x+y)}{2(x+y+z)}}$$

dla dodatnich x, y, z. Nic prostszego. Obie strony są dodatnie, więc mogę podnieść je do kwadratu i udowodnić, że różnica lewej i prawej jest nie mniejsza od zera:

$$\frac{4xyz}{x+y+z} + (x-y)^2 - (x+y)^2\left(1 - \frac{x+y}{x+y+z}\right) =$$
$$= \frac{4xyz + (x+y+z)(x-y)^2}{x+y+z} - (x+y)^2\left(\frac{z}{x+y+z}\right) =$$
$$= \frac{4xyz + (x+y)(x-y)^2 + z(x-y)^2 - z(x+y)^2}{x+y+z} =$$
$$= \frac{4xyz + (x+y)(x-y)^2 + z(-4xy)}{x+y+z} =$$
$$= \frac{(x+y)(x-y)^2}{x+y+z} \geqslant 0$$

6. (by Michał Pilipczuk)

Niech graf z zadania będzie uporządkowaną parą zbiorów wierzchołków i krawędzi (V, E). Dla każdej uporządkowanej pary $s, p \in V \cup \{-1\}$ połączonej krawędzią zdefiniujmy rekurencyjnie operacje $DFS(s, p)$:

- Przyporządkowuje krawędzi pomiędzy s i p kolejny numerek (zaznaczam jej czas przejścia).
- Jeśli odwiedziłem już wierzchołek p, to kończę.
- W przeciwnym razie odpalam po kolei dla każdego wierzchołka r, który jest sąsiadem p i takim, że $s \neq r$ DFS(p,r), jeśli krawędź pomiędzy p i r nie została jeszcze ponumerowana.

Dla dowolnego $v \in V$ odpalamy $DFS(-1, v)$. Pokażemy, że powstała w ten sposób numeracja spełnia własności zadania. Po pierwsze, ponieważ graf jest spójny, to DFS przejdzie każdą krawędź, więc wszystkie zostaną ponumerowane i każda dokładnie jeden raz. Po drugie, z wierzchołka v wychodzi krawędź o numerze 1, więc na pewno NWD krawędzi zeń wychodzących będzie równe 1. Po trzecie rozpatrzmy dowolny $w \in V$ różny od v i moment w którym po raz pierwszy do niego wchodzimy. Wówczas numeruję krawędź którą doszedłem doń pewnym l. Następnie zauważmy, że żadna z pozostałych krawędzi dochodzących do w nie została jeszcze ponumerowana (gdyż w przeciwnym wypadku ten wierzchołek będzie już odwiedzony), więc odpalę DFS dla co najmniej jednego jeszcze sąsiada w, bo stopień w to co najmniej 2 i jej nadam numer $l + 1$. Więc wśród krawędzi wychodzących z w są dwie krawędzie o numerach l i $l + 1$, a te są na pewno względnie pierwsze. Zatem dla każdego w NWD krawędzi zeń wychodzący będzie równe 1. Zatem pokazaliśmy algorytm konstruujący numerację szukaną w zadaniu, więc ona istnieje.