Rozwiązania

1.

Odpowiedź: nie, nie istnieje takie n.

Dowód:

Załóżmy, że istnieje takie n i ciąg liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_n$, że $\frac{n}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}}$ jest całkowite. Wówczas zauważmy, że:

$$\frac{n}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}} = \frac{np_1p_2p_3\ldots p_{n-1}p_n}{p_2p_3p_4\ldots p_{n-1}p_n + p_1p_3p_4\ldots p_{n-1}p_n + \ldots + p_1p_2\ldots p_{n-1}}$$

Zatem ta liczba po prawej ma być całkowita. Zauważm, że dla każdego p_i w mianowniku wszystkie wyrazy oprócz jednego są podzielne przez p_i - oprócz tego w którym się to p_i skróciło, gdyż liczby z naszego ciągu są parami różne. Zatem dla każdego p_i mianownik jest sumą wyrazów podzielnych przez p_i i jednego niepodzielnego, więc jest on niepodzielny. Zatem cały mianownik, który jest większy od 1, bo $n \geqslant 2$, musi się skrócić z n. Ale mianownik składa się z n składników, z których każdy jest iloczynem przynajmniej jednej liczby pierwszej, więc każdy jest równy przynajmniej 2, więc cały mianownik to przynajmniej $2n$, zatem licznik nie skróci całego mianownika, więc liczba nie mogła być całkowita. Uzyskaliśmy więc sprzeczność, co dowodzi postawionej przez nas tezy.

2.

Pokażemy, że w sześciokącie $ABCDEF$ dwusieczne wszyskich kątów przetną się w jednym punkcie, wówczas punkt ten będzie równoodległy od każdej pary kolejnych boków, więc będzie środkiem okręgu wpisanego. Rozpatrzmy dwusieczne kątów B, D, F. Jako, że trójkąty ABC,CDE,EFA są równoramienne, to dwusieczne te są zarazem symetralnymi odcinków AC,CE,EA, więc przecinają się w punkcie I - środku okręgu opisanego na trójkącie ACE. Pokażemy, że dwusieczna kąta przy wierzchołku A również przechodzi przez punkt I, czyli, że AI jest dwusieczną kąta przy A. Oznaczmy $\angle BCD = \angle DEF = \angle FAB = \zeta$, $\angle BAC = \angle ACB = \gamma$, $\angle DCE = \angle CED = \beta$, $\angle FEA = \angle EAF = \alpha$. Wówczas z kąta środkowego i wpisanego $\angle AIE = 2\angle ACE = 2(\zeta - \gamma - \beta) = 2\zeta - 2\gamma - 2\beta$. Ponieważ trójkąt AIE jest równoramienny, to $\angle IAE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AIE = 90^\circ - \zeta + \beta + \gamma$. Zatem $\angle FAI = \alpha + \angle AIE = 90^\circ - \zeta + \alpha + \beta + \gamma$. Zauważmy, że skoro w wyniku kąty α, β, γ spełniają symetryczne role, to analogicznie wyliczając kąt $\angle BAI$ również uzyskamy ten sam wynik, więc AI dzieli kąt przy wierzchołku A na równe części. Zatem analogicznie rozumując dla wierzchołków C i E mamy, że wszystkie dwusieczne przetną się w punkcie I, jest on zatem środkiem okręgu wpisanego w sześciokąt.

3.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny po n. Krok 1 jest oczywisty - dla 4 gości (bo niżej założenie nie może być spełnione) każdy zna każdego, więc wszyscy się znają, istnieje więc w grafie znajomości cykl długości 4.

Teraz założmy, że mamy n znajomych uporządkowanych w taki graf i wiemy, że dla każdego $q < n$ teza indukcyjna zachodzi. Założmy przeciwnie, że w grafie nie ma cyklu długości niepodzielnej przez 3. Zauważmy najpierw, że graf musi być spójny, gdyż w przeciwnym razie z założenia indukcyjnego w każdej spójnej składowej musiałby istnieć interesujący nas cykl, więc byłaby sprzeczność. Weźmy więc w naszym grafie dowolny cykl (istnieje, gdyż w przeciwnym razie w grafie musiałyby istnieć wierzchołki o stopniu 1, a wszystkie mają stopień 3) i nazwijmy go K. Oczywiście długość K jest podzielna przez 3, więc podzielmy wierzchołki K na 3 podzbiory A, B, C, które odpowiadają kolejno co trzecim wieżzchołkom w cyklu K. Teraz udowodnijmy mały lemacik: jeśli dwa cykle mają wspólną ścieżkę (i to jest cała ich częsc wspólna), to długość tej ścieżki jest podzielna przez 3. Niech a, b, s to odpowiednio długości cykli i ścieżki. Wówczas możemy skonstruować cykl w postaci kawałków cykli, które nie należą do ścieżki i będzie miał on długość $a + b - 2s$, wieć jeśli a, b jest podzielne przez 3 zaś s nie, to uzyskaliśmy cykl długości niepodzielnej przez 3. Z tego lematu od razu nam wynika, że nie ma połączenia między żadnymi dwoma wierzchołkami z cyklu K (bo byłaby to ścieżka długości 1). Więc skoro stopnie wierzchołków z K są równe 3, to istnieje niepusty zbiór U wierzchołków spoza K. A świstak na to niemożliwe. Weżmy pewne $u \in U$. Załóżmy, że istnieją zeń dwie ścieżki, z których jedna dochodzi do cyklu K w wierzchołku należącym do zbioru A: a, a druga w wierzchołku należącym do B: b (jest to pierwsze zetknięcie tych ścieżek z cyklem K). Niech p będzie ostatnim wspólnym wierzchołkiem na tych ścieżkach licząc od u. Wówczas mamy dwa cykle: K i cykl złożony z dwóch kawałków sćieżek z u, ale rozpoczynających się w p i kończących się odpowiednio w a i b oraz kawałku mie"dzy a i b. Ponieważ założyliśmy, że a i b należą do żożnych podzbiorów z A, B, C to długość ścieżki z a do b po cyklu K jest niepodzielna przez 3, więc z lematu mamy sprzeczność. Zatem zbiór U mogę podzielić na 3 podzbiory X, Y, Z, które odpowiadają wierzchołkom z których ścieżki dochodzą do cyklu K w wierzchołkach należących do A, B, C. Zauważmy, że skoro A, B, C były niepuste to i X, Y, Z są niepuste, bo należą do nich chociażby trzeci sąsiedzi wierzchołków z A, B, C. Nich $k = 3l$ będzie liczbą wierzchołkoów z K. Bez szkody na ogólności mogę założyć, że X ma najmniejszą moc z A, B, C, więc $|X| \leqslant \frac{(n-k)}{3} = \frac{n}{3} - l$. Jednocześnie krawędzie pomiedzy zbiorem X a cyklem K są trzecimi krawędziami wychodzącymi z wierzchołków należących do A. Niech $X' = X \cup A$ plus krawędzie między wierzchołkami z X', więc mamy podgraf całego grafu G o mocy co najwyżej $\frac{n}{3} - l + l = \frac{n}{3}$. Teraz będę chciał z tego podgrafu zrobić graf o liczbie wierzchołków mniejszej niż n i który spełnia założenie o stopniu wierzchołków 3. Wiemy, że to założenie spełniają już wszystkie wierzchołki z X (bo pomiędzy X a Y i Z nie może być krawędzi), a nie spełniają te z A, bo ich stopień to za każdym razem 1 (to trzecie połączenie z wierzchołkiem z X). Aby zatem to zrobić będziemy zlepiali kolejne wierzchołki z A po trzy w pęczku aby uzyskać nowe wieżzchołki o stopniu 3 (zlepiamy po kolei jadąc wzdłuż cyklu K). W zależności od reszty z dzielenia przez 3 l-a zostanie nam 0, 1 lub 2 wierzchołki. Jeśli 0 to nie ma problemu, mamy graf o liczbe wierzchołków co najwyżej $\frac{n}{3}$, bo zlepianie zabiera nam wierzchołki. Litwo, ojczyzno moja, ty jesteś jak zdrowie... Jeśli 1 to wykonujemy następujący manewr: bierzemy cały graf, który jak na razie skonstruowaliśmy oprócz niezgrupowanego wierzchołka i krawędzi do niego i odbijamy symetrycznie. Następnie dwa uzyskane wierzchołki o stopniu 2 (te połączone z wyrzuconym wierzchołkiem) łączymy ze sobą i założenie o stopniu każdego wierzchołka 3 jest spełnione zaŚ liczba wierzchołków całego skonstruowanego grafu jest co najwyżej $\frac{2}{3}n$. Jeśli zaś mamy resztę 2, to podłączamy te dwa wierzchołki w 1 wierzchołek, odbijamy cały konstruowany graf i podłączemy krawędzią dwa wierzchołki o stopniu 2- i mamy szukany graf o liczbie wierzchołków co najwyżej $\frac{2}{3}n$. Niech skonstruowany graf to będzie graf R. Z założenia indukcyjnego bierzemy w grafie R cykl S o długości niepodzielnej przez 3. Zauważmy, że skoro pomiędzy odbitymi częściami grafu (jeśli w ogóle odbijaliśmy), była tylko jedna krawędź, to cykl S musi należeć w całości do jednej z symetrycznych części, więc w każdej jest symetryczny cykl S. Weźmy więc cykl S należący do tej rzeczywistej, czyli nieodbitej części. Jeśli cykl przechodzi przez wierzchołek powstały w wyniku sklejenia to w oryginalnym grafie G to sklejenie mogę zastąpić poprzez przejście po ścieżce pomiedzy dwoma z wierzchołków sklejonych (tej krótszej ścieżce, aby ścieżki się nie pokrywały), a ponieważ wszystkie sklejane wierzchołki należą do zbioru A, to te wszystkie ścieżki mają długość podzielną przez 3, więc dolepienie każdej nie zmieni faktu, że cykl S z dolepionymi ścieżkami ma długość niepodzielną przez 3. Wieć znaleźliśmy w grafie G cykl o długości niepodzielnej przez 3, więc mamy sprzeczność. Zatem na mocy rozumowania indukcyjnego jesteśmy tak w stanie usadowić niepodzielną przez 3 liczbę przyjaciół przy stole, aby teza zadania była spełniona (ktoś jeszcze pamięta o jakichś przyjaciołach i stole???) c.k.d.

4.

Zauważmy, że przekształcając równoważnie:

$$x_{i+1}x_i(x_i+2) = 2x_i^3 + x_{i+1}^2$$

$$0 = 2x_i^3 - x_i^2 x_{i+1} - 2x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2$$

$$(2x_i - x_{i+1})(x_i^2 - x_{i+1}) = 0$$

Zatem następny wyraz ciągu x_i jest poprzednim przemnożonym przez 2 lub podniesionym do kwadratu. Oznaczmy więc poprzez ciągi zerojedynkowe długości 2005 odpowiednie ciągi operacji, które wykonujemy aby uzyskać kolejne wyrazy ciągu x_i, gdzie 0 będzie wyrażało operacje przemnożenia przez 2 zaś 1 podniesienia do kwadratu. Najpierw pokażemy, że każdy ciąg oprócz samych zer koduje pewne dokładnie jedno rozwiązanie. Zauważmy, że mając najpierw x_1 a następnie wynik przemnażając według schematu danego przez ciąg zerojedynkowy przez dwójki lub podnosząc do kwadratu uzyskując nowy wynik w końcu, po wykonaniu 2005 operacji uzyskamy pewne wyrażenie, które znowu ma się równać x_1. Mamy więc równanie na x_1 postaci:

$$2^k x_1^l = x_1$$

Zauważmy teraz, że jeśli cały czas mnożyliśmy przez 2, to x_1 się skróci (bo wtedy $l = 1$), więc równanie będzie postaci 2 do dużej potęgi jest równe 1, więc wówczas nie może być spełniającego x_1. W przeciwnym razie, co najmniej raz kwadratowaliśmy wynik, więc potęga przy x_1 będzie co namniej 2, więc po skróceniu równanie będzie postaci:

$$x_1 = \frac{1}{2^{\frac{k}{l-1}}}$$

Więc x_1 będzie odwrotnością liczby większej równej od 1, więc będzie mniejsze równe od 1. Zauważmy, że podobne równania moglibyśmy napisać dla dowolnego x_i, więc w każdym działającym ciągu dla każdego i zachodzi $x_i \leqslant 1$. Zatem dla każedgo ciągu zerojedynkowego istnieje dokładnie jedno rozwiązanie oprócz ciągu z samymi zerami. Teraz pokażemy, że dla dowolnych dwóch ciągów zerojedynkowych rozwiązanie w postaci ciągu x_i jest różne. Załormy, że dwa różne ciągi zerojedynkowe realizują rozwiązanie w postaci tego samego ciągu x_i. Niech pewnym miejscem, gdzie ciągi zerojedynkowe się różnią jest indeks p. Wówczas, jako, że realizowane jest to samo rozwiązanie, to z x_p przy pomocy przemnożenia przez 2 i podniesienia do kwadratu uzyskaliśmy ten sam wyraz x_{p+1}. Jednocześnie skoro wiemy, że każde rozwiązanie jest realizowane przez jakiś ciąg zerojedynkowy, a dla każdego rozwiązania realizowanego przez ciąg, każdy wyraz jest większy od zera i mniejszy równy 1, to również zachodzi $0 < x_p \leqslant 1$. Zatem przemnożenie przez 2 x_p tworzy $x_{p+1} > x_p$, zaś podniesienie do kwadratu toworzy $x_{p+1} \leqslant x_p$, zatem mamy sprzeczność, bo x_{p+1} nie może być zarówno mniejsze równe jak i w"ieksze od x_p. Zatem dla każdego z $2^{2005} - 1$ ciągów (tych oprócz samym zer) istnieje rozwiązanie i dla każdych dwóch jest inne, więc rozwiązań układu jest $2^{2005} - 1$.

5.

Oznaczmy $\angle BAC = \alpha$ oraz $k = \frac{AC}{AB}$. Zauważmy, że skoro również $\angle BFD = \alpha$ to z kątów naprzemioanległych $AC \| DF$ więc czworokąt $AFDC$ jest trapezem równoramiennym, więc $AF = CD$. Zauważmy, że skoro $\angle EDC = \angle ECD = \alpha$, to trójkąt EDC jest równoramienny i podowbnyu do BAC z cechy KKK. Zatem $EF = CD = k \cdot EC$, więc wektor $\overrightarrow{AF}$ powstaje z wektora $\overrightarrow{EC}$ poprzez obrót o kąt α i jednokładność o skali k. Analogicznie jest z wektorami $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$. Więc w tym podobieństwie trójkąt EBC przechodzi na FCA, więc odpowiadające boki tych trójkątów są do sibie pod kątem α. Więc $\angle FPB = \alpha$ stąd $\angle FPE + \angle FAE = 180° - \alpha + \alpha = 180°$, więc na czworokącie $AEPF$ da się opisać okrąg c.k.d.

6.(by Robert Pałuba)
Na początku mamy coś takiego:

$$a\sqrt{b^2+c^2+bc}+b\sqrt{a^2+c^2+ac}+c\sqrt{a^2+b^2+ab}\geqslant\sqrt{3}(ab+ac+bc)$$

Po podzieleniu stronami przez abc otrzymujemy:

$$\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{bc}}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{ac}}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}}\geqslant\sqrt{3}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

Wykonując oryginalne podstawienie $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$, i $\frac{1}{z}=c$, wychodzi:

$$\sqrt{x^2+y^2+xy}+\sqrt{x^2+z^2+xz}+\sqrt{y^2+z^2+yz}\geqslant\sqrt{3}(x+y+z)$$

Nierównośc ta jest jednorodna, więc możemy założyć, że $x+y+z=1$. Wtedy sprowadza się ona do:

$$\sqrt{(1-z)^2-xy}+\sqrt{(1-y)^2-xz}+\sqrt{(1-x)^2-yz}\geqslant\sqrt{3}$$

Teraz największy myk tego zadania:

$$\frac{(x+y)^2}{4}\geqslant xy$$
$$\frac{(1-z)^2}{4}\geqslant xy$$

Zatem zamiast xy możemy wstawić $\frac{(1-z)^2}{4}$ i tylko wzmocni to tezę. Analogicznie wstawiamy za xz i yz.

$$\sqrt{\frac{3(1-z)^2}{4}}+\sqrt{\frac{3(1-y)^2}{4}}\sqrt{\frac{3(1-x)^2}{4}}\geqslant\sqrt{3}$$
$$\frac{1-z}{2}+\frac{1-y}{2}+\frac{1-x}{2}\geqslant 1$$
$$1\geqslant 1$$

Co kończy dowód