Pięciogodzinówka przed drugim etapem, werszyn Chuck Norris visiting China

luty 2006, dzień 2.

4. Pokazać, że jeśli szachownicę $a \times b$ da się pokryć pionowymi klockami $1 \times n$ i poziomymi $1 \times m$ tak, by na siebie nie nachodziły i nie wystawały poza planszę, to da się ją pokryć klockami tylko jednego z tych rodzajów.

5. Trójkąt ostrokątny $A_1A_2A_3$ opisany jest na okręgu ω stycznym do boków A_2A_3,A_3A_1,A_1A_2 odpowiednio w punktach L_1, L_2, L_3. Ponadto punkty K_1, K_2, K_3 to odpowiednio spodki wysokości poprowadzonych z A_1, A_2, A_3. Pokazać, że proste K_1K_2, K_2K_3, K_3K_1 odbite odpowiednio względem prostych L_1L_2, L_2L_3, L_3L_1 wycinają z płaszczyzny trójkąt wpisany w okrąg ω.

6. Pokazać, że wielomian $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych dla każdego $x \in \mathbb{R}$ spełnia $W(x) \geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $W(x) = (P(x))^2 + (Q(x))^2$.