Pięciogodzinówka przed drugim etapem 2

styczeń 2006, dzień 2.

4. Niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają następujące warunki: $a + b + c + d = 0$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$, $abcd = 1$. Udowodnić, że $|ab + ac + ad + bc + bd + cd| \geqslant 2$.

5. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego zaś M środkiem boku AB. Pokazać, że:

$$2IM \geqslant AB\sqrt{1 - \frac{2AB}{AB + BC + CA}}$$

6. W księstwie Hofmańskim jest wiele miast, z których niektóre połączone są bezpośrednimi, dwukierunkowymi drogami, zaś w sumie dróg w księstwie jest k. Ponadto wiadomo, że z każdego miasta da się dojechać do każdego innego, być może odwiedzając pewne miasta po drodze oraz, że z każdego miasta wychodzą przynajmniej 2 drogi. Pokazać, że książe Hofman może ponumerować drogi liczbami od 1 do k tak, aby dla każdego miasta największy wspólny dzielnik numerów dróg z niego wychodzących wynosił 1.