Pięciogodzinówka przed drugim etapem

styczeń 2006, dzień 2.

4. Znaleźć liczbę rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x_2x_1(x_1+2) = 2x_1^3 + x_2^2 \\ x_3x_2(x_2+2) = 2x_2^3 + x_3^2 \\ x_4x_3(x_3+2) = 2x_3^3 + x_4^2 \\ \vdots \\ x_{2005}x_{2004}(x_{2004}+2) = 2x_{2004}^3 + x_{2005}^2 \\ x_1x_{2005}(x_{2005}+2) = 2x_{2005}^3 + x_1^2 \end{cases}$$

w ciągach liczb dodatnich $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2004}, x_{2005})$.

5. Na bokach BC, CA i AB równoramiennego trójkąta ABC, w którym $AB = BC$, obrano odpowiednio punkty D, E i F tak, by $\angle BFD = \angle CDE = \angle BAC$. Proste BE i CF przecinają się w punkcie P. Wykazać, że na czworokącie $AEPF$ da się opisać okrąg.

6. Pokazać, że dla dowolnych a, b, c rzeczywistych dodatnich zachodzi nierówność:

$$a\sqrt{b^2+c^2+bc} + b\sqrt{c^2+a^2+ca} + c\sqrt{a^2+b^2+ab} \geqslant \sqrt{3}(ab+bc+ca)$$