

## Pięciogodzinówka przed drugim etapem

styczeń 2006, dzień 2.

4. Znaleźć liczbę rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x_2x_1(x_1 + 2) = 2x_1^3 + x_2^2 \\ x_3x_2(x_2 + 2) = 2x_2^3 + x_3^2 \\ x_4x_3(x_3 + 2) = 2x_3^3 + x_4^2 \\ \vdots \\ x_{2005}x_{2004}(x_{2004} + 2) = 2x_{2004}^3 + x_{2005}^2 \\ x_1x_{2005}(x_{2005} + 2) = 2x_{2005}^3 + x_1^2 \end{cases}$$

w ciągach liczb dodatnich  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2004}, x_{2005})$ .

5. Na bokach  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$  równoramiennej trójkąta  $ABC$ , w którym  $AB = BC$ , obrano odpowiednio punkty  $D$ ,  $E$  i  $F$  tak, by  $\angle BFD = \angle CDE = \angle BAC$ . Proste  $BE$  i  $CF$  przecinają się w punkcie  $P$ . Wykazać, że na czworokącie  $AEPF$  da się opisać okrąg.

6. Pokazać, że dla dowolnych  $a, b, c$  rzeczywistych dodatnich zachodzi nierówność:

$$a\sqrt{b^2 + c^2 + bc} + b\sqrt{c^2 + a^2 + ca} + c\sqrt{a^2 + b^2 + ab} \geq \sqrt{3}(ab + bc + ca)$$