

Pięciogodzinówka przed drugim etapem

styczeń 2006, dzień 1.

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje $n \geq 2$, dla którego istnieje ciąg n różnych liczb pierwszych, których średnia harmoniczna jest liczbą całkowitą.

2. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzi $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$ oraz $\angle BCD = \angle DEF = \angle FAB$. Pokazać, że w ten sześciokąt da się wpisać okrąg.

3. Na przyjęciu spotkało się n gości. Każdy z nich wśród pozostałych zaproszonych ma dokładnie 3 przyjaciół (zakładamy, że jeżeli osoba A jest przyjacielem osoby B, to osoba B jest przyjacielem osoby A). Pokazać, że da się wybrać k gości, gdzie k nie jest podzielne przez 3, których można usadzić przy okrągłym stole tak, by każdy siedział pomiędzy swoimi przyjaciółmi.