Parcelacja meczu 2

1. *Odległością* między dwoma wierzchołkami w grafie nieskierowanym nazywamy liczbę równą 0, jeśli nie istnieje ścieżka między tymi wierzchołkami lub też długość najkrótszej takiej ścieżki, jeśli istnieje. *Średnicą* grafu nazywamy maksimum z odległości pomiędzy wszystkimi parami wierzchołków. Dla grafu nieskierowanego G *dopełnieniem* grafu nazywamy graf mający ten sam zbiór wierzchołków, ale w dopełnieniu każda para wierzchołków jest połączona krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w G nie była. Pokazać, że dla każdego grafu nieskierowanego G on lub jego dopełnienie mają średnicę nie większą niż 3.

2. Rozstrzygnąć, czy istnieje takie n, że szachownicę $3 \times n$ można obejść skoczkiem szachowym odwiedzając każde pole dokładnie raz i wracając na koniec na początkowe pole.

3. Niech m, n będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że $n \leqslant m$. Pokazać, że:

$$2^n n! \leqslant \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leqslant (m^2+m)^n$$

4. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokość AD. Punkty E i F są różne od D i z D współliniowe oraz spełniają warunki $AE \perp BE$ oraz $AF \perp CF$. Pokazać, że jeśli M i N to odpowiednio środki odcinków BC i EF, to $AN \perp MN$.

5. Wewnątrz czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg istnieje taki punkt P, że

$$\angle BPC = \angle BAP + \angle PDC$$

Punkty E, F, G są odpowiednio rzutami punktu P na proste AB, AD, CD. Pokazać, że trójkąty FEG i PBC są podobne.

6. Pokazać, że jeśli w spójnym grafie dwudzielnym o liczbie wierzchołków co najmniej 3 wszystkie stopnie wierzchołków są równe, to usunięcie żadnej krawędzi z grafu go nie rozspójni.

7. Niech n będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą parzystą. Udowodnić, że istnieje permutacja $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ spełniająca dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ warunek, że $x_{i+1} \in \{2x_i, 2x_i - 1, 2x_i - n, 2x_i - n - 1\}$, przy czym $x_{n+1} = x_1$.