Parcelacja meczu 1

1. Przy okrągłym stole siedzi n osób, każda z nich ma początkowo przypisaną inną liczbę pierwszą. Co minutę jedna z osób modfikuje swoją liczbę mnożąc ją przez liczbę jednego z sąsiadów. Czy może się tak zdarzyć sytuacja, gdy dwie różne osoby przy stole mają przypisaną tą samą liczbę?

2. Rozsztrzygnąć, czy dla każdego n natualnego da się dobrać n parami różnych liczb tak, by iloczyn każdych dwóch z nich był podzielny przez sumę pozostałych.

3. Niech $p \geqslant 5$ będzie liczbą pierwszą oraz niech r będzie liczbą sposobów, na jakie da się ustawić p pionków na szachownicy $p \times p$ tak, by nie wszystkie stały w jednym rzędzie (ale w kolumnie już mogą). Pokazać, że $p^5|r$.

4. Pokazać, że jeśli $n = rs$ gdzie $r, s > 2$ oraz $r \perp s$ i $a \perp n$ to $n | a^{\frac{\phi(n)}{2}} - 1$.

5. Rozwiązać układ równań w trójkach liczb rzeczywistych (x, y, z):

$$\begin{cases} \frac{1}{xy} = \frac{x}{z} + 1 \\ \frac{1}{yz} = \frac{y}{x} + 1 \\ \frac{1}{zx} = \frac{z}{y} + 1 \end{cases}$$

6. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego na ABC, zaś A', B', C' są odpowiednio środkami okręgów opisanych na trójkątach BOC, AOC, AOB. Pokazać, że pole trójkąta ABC nie przekracza pola trójkąta $A'B'C'$.

7. W trójkącie ABC punkt K jest środkiem boku BC zaś O środkiem okręgu opisanego. Punkty M i N leżą odpowiednio na symetralnych boków AB i AC oraz spełniają $MB \perp BC$ oraz $NC \perp BC$. Symetralna boku BC przecina prostą MN w punkcie P. Pokazać, że jeśli Q jest środkiem odcinka OP, to $AQ = KQ$.