Stare drugie etapy

1. Znaleźć liczbę rozwiązań układu w trójkach uporządkowanych liczb rzeczywistych (x, y, z) zależności od parametru a:

$$\begin{cases} x + y^2 + z^2 = a \\ x^2 + y + z^2 = a \\ z^2 + y^2 + z = a \end{cases}$$

2. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia warunek:

$$\angle PBA = \angle PCA = \frac{1}{3}(\angle ABC + \angle ACB)$$

Pokazać, że zachodzi:

$$\frac{AC}{AB + PC} = \frac{AB}{AC + PB}$$

3. Dany jest zbiór $n \geqslant 2$ punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie są współliniowe. Kolorujemy odcinki pomiędzy każdymi dwoma z tych punktów tak, by odcinki mające wspólny koniec nie miały tego samego koloru. Znaleźć minimalną liczbę kolorów potrzebnych do wykonania takiego kolorowania.

4. Trójkąt ABC, w którym $\angle BAC = 90°$ jest podstawą ostrosłupa $ABCD$. Ponadto zachodzą równości $AD = BD$ oraz $AB = CD$. Pokazać, że $\angle ACD \geqslant 30°$.

5. Znaleźć wszystkie trójki liczb całkowitych dla których zachodzi:

$$x^2 + 3y^2 = 1998x$$

6. W trójkącie ABC kąt BAC jest rozwarty oraz zachodzi $\angle BAC = 2\angle ABC$. Prosta prostopadła do prostej BC przechodząca przez B przecina prostą AC w punkcie D. Punkt M jest środkiem boku AB. Pokazać, że $\angle AMC = \angle BMD$.

7. Liczby nieujemne a, b, c, d, e, f, których suma jest równa 1 spełniają nierówność:

$$ace + bdf \geqslant \frac{1}{108}$$

(a) Pokazać, że:

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab \leqslant \frac{1}{36}$$

(b) Rozstrzygnąć, czy istnieje taka szóstka liczb a, b, c, d, e, f sumująca się do 1, dla której w obu podanych nierównościach zachodzą równości.