Zadania niestandardowe i raczej hardcorowe

kółko starsze, 21 lutego 2006

1. Znaleźć wszystkie skończone zbiory A punktów na płaszczyźnie, aby symetralna każdego odcinka łączącego dwa punkty z tego zbioru była osią symetrii zbioru A.

2. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego, który to jest styczny do boków BC, AC, AB odpowiednio w punktach K, L, M. Proste KM i LM przecinają prostą równoległą do KL przechodzącą przez C w punktach Q i S. Pokazać, że kąt $\angle QIS$ jest ostry.

3. Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Znaleźć najmniejsze takie C, aby dla każdego ciągu liczb nieujemnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodziło:

$$\sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant C(\sum_i x_i)^4$$

4. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$, by $f(1) = 2$ i dla każdego $n \in \mathbb{Z}^+$ zachodziło $f(f(n)) = f(n) + n$ oraz $f(n+1) > f(n)$.

5. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki podzbiór liczb całkowitych nieujemnych, by każdą liczbę całkowitą dodatnią dało się jednoznacznie przedstawić jako różnica dwóch elementów tego podzbioru.

6. Rozstrzygnąć, czy istnieje dowolnie duży podzbiór punktów na płaszczyźnie, by odległość pomiędzy dowolnymi dwoma z nich była niewymierna, ale by każde trzy tworzyły niezdegenerowany trójkąt o wymiernym polu.

7. Onufry z Joasią grają w grę. Na początku dana jest liczba całkowita $n_0 > 1$. W kolejnych turach najpierw Onufry znając n_{2k} wybiera n_{2k+1} tak, by $n_{2k} \leqslant n_{2k+1} \leqslant n_{2k}^2$ a następnie Joasia dobiera tak n_{2k+2}, by $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}} = p^\alpha$ dla pewnego pierwszego p i całkowitego dodatniego α. Onufry wygrywa jeśli dobierze liczbę 2006 zaś Joasia, jeśli 1. Dla jakich n_0 Onufry ma strategię wygrywającą, dla jakich Joasia, a dla jakich żadne z nich?