Zadania różne i raczej mało hardcorowe

kółko młodsze, 23 lutego 2006

1. Niech $g(x) = \frac{9^x}{3+9^x}$. Obliczyć $g(\frac{1}{2006}) + g(\frac{2}{2006}) + \ldots + g(\frac{2005}{2006})$.

2. W trójkącie ABC takim, że kąty przy wierzchołkach B i C wynoszą przynajmniej po $45°$ dobudowano na zewnątrz trójkąty prostokątne równoramienne BAP i CAQ takie, że kąty $\angle BAP$ i $\angle CAQ$ oraz do wewnątrz trójkąt prostokątny równoramienny BRC taki, że kąt $\angle BRC$ jest prosty. Pokazać, że trójkąt PQR jest prostokątny równoramienny.

3. W trójkącie ABC na bokach BC, AC, AB obrano odpowiednio punkty P, Q, R a następnie na prostych QR, PR, PQ obrano punkty $A'B'C'$ takie, że $AB \| A'B'$,$BC \| B'C'$ oraz $AC \| A'C'$. Pokazać, że $\frac{A'B'}{AB} = \frac{[PQR]}{[ABC]}$.

4. W kwadracie $ABCD$ o boku 1 na bokach AB i CD obrano odpowiednio punkty P i Q. Proste AQ i DP przecinają się w K zaś proste BQ i CP przecinają się w L. Obliczyć maksymalne pole czworokąta $PKQL$ dla różnych doborów punktów P i Q.

5. Czy istnieje prawidłowo zapisana (tzn. bez zer na początku) potęga dwójki taka, aby można było przestawiając jej cyfry uzyskać inną, prawidłowo zapisaną potęgę dwójki?

6. Pokazać, że k jest wymierne wtedy i tylko wtedy, gdy w ciągu $k, k+1, k+2, \ldots$ istnieją trzy różne wyrazy tworzące ciąg geometryczny.

7. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają układ równań:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = 3d^3 \\ b^4 + c^4 + d^4 = 3a^4 \\ c^5 + d^5 + a^5 = 3b^5 \end{cases}$$

Pokazać, że $a = b = c = d$.

8. Pokazać, że istnieje takie $n \in \mathbb{Z}^+$, że liczby $n+1, n+2, \ldots, n+200666666$ są złożone a ponadto liczba $n+666$ ma conajmniej 200666 różnych dzielników pierwszych.