Nierówności

29.10.2008

1. Pokazać, że dla liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi:

$$x^4 + y^4 + z^2 \geqslant \sqrt{8}xyz.$$

2. Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta. Udowodnij, że:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant \frac{b+c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} + \frac{a+b-c}{c}.$$

3. Iloczyn dodatnich liczb a_1, a_2, …, a_n ($n \geqslant 2$) równy jest 1. Pokazać, że:

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n} \geqslant 1.$$

4. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają nierówności:

$$|x| \geqslant |y+z| \qquad |y| \geqslant |z+x| \qquad |z| \geqslant |x+y|.$$

Wykazać, że $x + y + z = 0$.

5. Pokazać, że jeśli a, b, $c \in \mathbb{R}_+$ oraz $a + b + c = 1$, to:

$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leqslant \sqrt{15}.$$

6. Udowodnij, że dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówność:

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geqslant \frac{9}{a+b+c}.$$

7. Niech a, b, $c \in \mathbb{R}_+$. Pokazać, że:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leqslant abc.$$