KÓŁECZKO Z NIERÓWNOŚCI (30.11.06)

1. TEORIA

1.1. Nierówności między średnimi:
Dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ zachodzi:
$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \geqslant \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$

1.2. Nierówność Muirheda
Jeśli dla ciągów $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ zachodzi:
1) dla każego k zachodzi $\sum_{i=1}^k a_i \geqslant \sum_{i=1}^k b_i$
2) dla n mamy $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$
mówimy, że $a \succ b$.
Nierówność Muirheda: jeśli $a \succ b$, to dla dodatnich $x_1, x_2, \dots, x_n$ zachodzi:
$\sum_{sym} x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n} \geqslant \sum_{sym} x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{b_n}$

1.3. Cauchy-Schwarz
Dla dowolnych ciągów liczb $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ zachodzi:
$(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) \geqslant (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2$

1.4. Cauchy-Schwarz w formie Engela
Dla dodatnich ciągów liczb $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ zachodzi:
$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geqslant \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sum_{i=1}^n b_i}$

1.5. Średnie
Średnią stopnia k liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy:
$M_{(a,k)} = \sqrt[k]{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^k}{n}}$
oraz przyjmujemy $M_{(a,0)} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$
Wtedy dla dowolnych $p \geqslant q$ zachodzi $M_{(a,p)} \geqslant M_{(a,q)}$.

2.ZADANKA - udowodnić, że...

2.1. $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$

2.2. a, b, c - długości boków pewnego trójkąta $\Rightarrow (a+b-c)(c+a-b)(b+c-a) \leqslant abc$

2.3. $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geqslant \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a+b+c$

2.4. $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \geqslant \sqrt{3}$

2.5. $(a, b, c \in \mathbb{R}^+ \wedge a^2+b^2+c^2 = 1) \Rightarrow \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geqslant 3$

2.6. $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geqslant \sqrt{a^8 + 8a^2b^3c^3}$

2.7. $(a, b, c \in \mathbb{R}^+ \wedge a^2+b^2+c^2 = 3) \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + a + b + c \geqslant 6$

2.8. $(x, y, z \in \mathbb{R}^+ \wedge xyz = 1) \Rightarrow \frac{1}{x^3+y^3+1} + \frac{1}{y^3+z^3+1} + \frac{1}{z^3+x^3+1} \geqslant 1$