Zadanka różne

wtorek, 14 lutego 2006

1. Niech a i b bedą względnie pierwszymi liczbami naturalnymi i n liczbą naturalną. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich k, iż $NWD(ak+b,n)=1$.

2. Udowodnić (nie korzystając z tw. Czebyszewa), że funkcji $\pi(x)$ nie da się przedstawić w postaci $\pi(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ to wielomiany.

3. Dowieść, że dla liczb $a,b,c\in\mathbb{R}\geqslant 1$ zachodzi nierówność:

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\leqslant\sqrt{c(ab+1)}$$

4. Dowieść, że dla liczb dodatnich $a,b,c\in\mathbb{R}$ spełniających warunek $a^2+b^2+c^2=3$, zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geqslant\frac{3}{2}$$

5. Dowieść, tym razem, że dla $a,b,c\geqslant 0, abc=1$ zachodzi:

$$\frac{1+ab^2}{c^3}+\frac{1+bc^2}{a^3}+\frac{1+ca^2}{b^3}\geqslant\frac{18}{a^3+b^3+c^3}$$

6. Pokazać, że dla $m,n\in\mathbb{N}$ spełniających warunek $n>m$ zachodzi podzielność:

$$n|NWD(n,m)\binom{n}{m}$$

7. Dowieść, że jeśli $n\in\mathbb{N}$ to: $n^{\pi(2n)-\pi(n)}<4^n$.

Do dwóch zadań uwaga: $\pi(n)$ to ilość liczb pierwszych mniejszych równych n.