Zadanka różne

wtorek, 28 lutego 2006

1. Pokazać, że równanie $a^2+b^5 = c^3$ ma nieskończenie wiele rozwiazań w liczbach całkowitych dodatnich.

2. Pewna liczba szkół wzięła udział w turnieju wysyłając reprezentacje złożone z pewnej liczby dziewczynek i pewnej liczby chłopców, przy czym całkowita liczba chłopców biorących udział w turnieju różniła się od całkowitej liczby dziewczynek o 1. Następnie odbył się mecz pomiędzy każdymi dwoma reprezentantami pochodzącymi z różnych szkół. Wiadomo, że liczba meczów w których zawodnicy byli przeciwnej płci różniła się od liczby meczów w ktròrcyh byli tej samej o co najwyżej 1. Wyznaczyć maksymalną liczbę szkół, które wystawiły nieparzystą liczbę reprezentantów.

3. Dowieść, że dla liczb $a, b, c \in \mathbb{R}$, spełniających warunek $a+b+c = 1$ zachodzi nierówność:

$$\sqrt{ab+c} + \sqrt{bc+a} + \sqrt{ca+b} \geqslant 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

4. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich $n \in \mathbb{N}$, że $n^2+1|n!$.

5. Znaleźć wszystkie liczby $a, b, c \in \mathbb{N}$, spełniające warunek $1 < a < b < c$, takie że:

$$(a-1)(b-1)(c-1)|abc-1$$

6. Niech liczby $x_1, x_2, .., x_n \in [-1, 1]$, wtedy $x_1^3 + x_2^3 + .. + x_n^3 = 0 \Longrightarrow x_1 + x_2 + .. + x_n \leqslant n/3$