KÓŁECZKO Z KÓLECZEK, CZWOROKĄTÓW I INNYCH BAJERÓW (17.01.07)

1. TEORIA

1.1. NAJMOCNIEJSZE TWIERDZENIE GEOMETRII

Dany jest okrąg o i punkt A na zewnątrz okręgu. Punkty B i C są punktami styczności prostych przechodzących przez A do okręgu o. Wtedy $AB = AC = Ao$

1.2. Czworokąt wpisany w okrąg

Czworokąt $ABCD$ jest można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy gdy $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

1.2. Czworokąty wypukłe, wklęsłe, krzyżowe opisane na okręgach

W czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać okąg wtedy i tylko wtedy gdy $AB + CD = AD + BC$.
W czworokąt wklęsły $ABCD$ (wklęsły jest kąt ADC) można wpisać okrąg (styczny do AB i CB i przedłużeń AD i CD) wtedy i tylko wtedy gdy $AB + CD = AD + BC$.
W czworokąt krzyżowy $ABCD$, taki, że AB i CD przecinają się, można wpisać okrąg (styczny do AB i CD oraz przedłużeń BC i AD) wtedy i tylko wtedy, gdy $AD + CD = AB + BC$.

1.2. Okręgi dopisane do trójkąta

Okrąg dopisany do trójkąta, to okrąg styczny do jednego z boków trójkąta i przedłużeń dwóch pozostałych.

2. ZADANIA

2.1. Okręgi wpisany i dopisany są styczne do boku BC odpowiednio w X i Y, do prostej AB - odpowiednio w K i L. Udowodnić równości: $BY = CX$, $KL = BC$, $AL = \frac{1}{2}(AB+BC+CA)$.

2.2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ okręgi wpisane w trójkąty ABD i BCD są styczne do odcinka BD odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnić, że $P = Q$ wtedy i tylko wtedy, gdy w czworokąt $ABCD$ da się wpisać okrąg.

2.3. Wewnątrz trójkąta ABC leży punkt P. Proste AP, BP, CP przecinają boki trójkąta odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnić,że jeżeli w czworokąty $AFPE$ i $CEPD$ można wpisać okręgi, to w $BFPD$ również.

2.4. Punkty P, Q, R, S leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$. Odcinki PR i QS dzielą czworokąt $ABCD$ na cztery czworokąty. Wykazać, że jeśli na trzech spośród nich można opisać okręgi, to na czwartym również, a $ABCD$ jest równoległobokiem.

2.5. Punkty P, Q, R, S należą odpowiednio do boków AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$. Odcinki DP i BS przecinają się w punkcie X, proste DQ i BR - w punkcie Y. W każdy z czworokątów: $ABCD$, $APXS$ i $CRQY$ można wpisać okrąg. Wykazać, że w czworokąt $DXBY$ można wpisać okrąg.

2.6. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a jego przekątne przecinają się w punkcie M. Punkty P, Q, R, S są rzutami prostokątnymi punktu M na boki czworokąta $ABCD$. Wykazać, że w czworokąt $PQRS$ można wpisać okrąg.

2.7. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg o_1 dopisany do tego trójkąta, jest styczny do boku AC w punkcie K, okrąg o_2 dopisany do tego trójkąta, jest styczny do boku AB w punkcie L. Dane są długości odcinków $AK = p$ i $BC = q$. Obliczyć długość odcinka AL.