Kółko z prostej Simpsona

1. Czwórka niezerowych liczb rzeczywistych a, b, x, y spełnia układ równań:

$$\begin{cases} 4abxy = 1 \\ a + b + \frac{3}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ x + y + \frac{3}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \end{cases}$$

Pokazać, że conajmniej dwie z nich są równe.

2. W kwadracie $ABCD$ punkty E i F leżą na bokach AB i BC odpowiednio i spełniają równość $EB = FB$. Punkt G jest rzutem punktu B na odcinek EC. Obliczyć miarę kąta $\angle FGD$.

3. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ dany jest punkt G spełniający własność $BG = 2AG$ i $CG = 3AG$. Obliczyć miarę kąta $\angle AGB$.

4. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okżag. Punkty P, Q, R są rzutami punktu D na boki BC, AC, AB

odpowiednio. Pokazać, że $PQ = QR$ wtedy i tylko wtedy gdy dwusiecznie kątów ABC i ADC przecinają się na odcinku AC.

5. Prostokąt $A_1A_5A_6A_2$ podzielono odcinkiem A_3A_4 na dwa prostokąty tak, że A_3 leży na odcinku A_1A_5 zaś A_4 na odcinku A_2A_6. Następnie prostokąt $A_3A_4A_6A_5$ podzielono na dwa prostokąty odcinkiem XY, że X leży na odcinku A_5A_6 zaś Y na A_3A_4. Niech Q, P będą rzutami punktu X na proste A_3A_2 oraz A_1A_4 odpowiednio. Pokazać, że punkty A_5, Y, P są współliniowe wtedy i tylko wtedy gdy punkty A_6, Y, Q są współliniowe.

6. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ostrokątny ABC oraz punkt X na zewnątrz od niego i zawarty w kącie ABC, że P - rzut X na prostą AB leży na zewnątrz odcinka AB, zaś Q - rzut X na prostą BC leży wewnątrz odcinka BC. Niech R będzie przecięciem prostych AC i PQ. Pokazać, że proste AC i XR są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty XPA i XQC są podobne.

7. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty D i E są spodkami wysokości z A i B odpowiednio. Zbudowano prostokąt $EWDU$ taki, że dwa z jego boków zawierają się w prostej BC i wysokości spuszczonej z A. Prosta UW przecina bok AB w punkcie P. Pokazać, że proste EP i AB są prostopadłe.