Trudniejsza teoria liczb

1. Znaleźć wszystkie liczby pierwsze p dla których istnieje $n \in \mathbb{Z}^+$, że

$$p | 2^n + 3^n + 6^n - 1$$

2. Niech $p_n(k)$ oznacza liczbę permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ o dokładnie k punktach stałych. Pokazać, że:

$$\sum_{i=0}^{n} i p_n(i) = n!$$

3. Dla liczby całkowitej dodatniej n macierzą srebrną nazywamy taką macierz $n \times n$, że w dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ w i-tym wierszu i w i-tej kolumnie razem występują wszystkie liczby ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$.

(a) Pokazać, że dla $n = 1997$ nie istnieje macierz srebrna.

(b) Pokazać, że dla nieskończenie wielu n istnieje macierz srebrna.

4. Niech $d(a)$ oznacza liczbę dzielników dodatnich liczby a. Znaleźć wszystkie takie k całkowite dodatnie dla których istnieje n, że $d(n^2) = kd(n)$.

5. Skonstruować taką funkcję $f : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}^+$, że dla dowolnych x, y należących do dziedziny:

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$$