Meksykańskie tematy

Zadanie 1. Dany jest równoległobok $ABCD$. Niech o będzie środkiem okręgu opisanego na ABD. Proste BC i CD przecinają o ponownie w punktach E i F. Pokazać, że środek okręgu opisanego na CEF leży na o.

Zadanie 2. Dane jest $n \in N$. Niech d_1 będzie zbiorem dzielników n^2 które przystają do 1 mod 4. Niech d_3 będzie zbiorem dzielników n^2 które przystają do 3 mod 4. Co jest większe $\#d1$ czy $\#d3$?

Zadanie 3. Znaleźć wszystkie funkcje $f : (0,1) \to R$ takie, że dla dowolnych $x, y \in (0,1)$ zachodzi

$$f(xy) = xf(x) + yf(y)$$

Zadanie 4. Dany jest pięciokąt wypukły o polu 1993, oraz 995 punktów wewnątrz tego pięciokąta. Wierzchołki oraz owych 995 punktów tworzą zbior S. Pokazać, że spośród punktów w S można wybrać 3 tworzące trójkąt o polu nie większym niż 1.

Zadanie 5. Niech $ABCD$ będzie trapezem, przy czym $AB||CD$. Zewnętrzne dwusieczne kątów $\angle A$ i $\angle C$ przecinają się w P, a zewnętrzne dwusieczne kątów $\angle B$ i $\angle D$ przecinają sie w punkcie Q. Pokazać, że PQ jest połową obwodu $ABCD$.

Zadanie 6. Niech $n \in N$ będzie liczbą nieparzystą. Pokazać, że wówczas

$$n|2^{n!} - 1$$

Zadanie 7. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych takich, że

$$n|2^n + 2$$