Mecz matematyczny

niedziela, 25 stycznia 2004

1. Rozstrzygnąć, dla jakich n naturalnych da się wszystkie podbiory zbioru $\{1 \ldots n\}$ pogrupować w $\binom{n}{[n/2]}$ parami rozłącznych łancuchów, gdzie przez łańcuch rozumiemy ciąg zbiorów, z których każdy kolejny jest podzbiorem poprzedniego i ma dokładnie o jeden element mniej.

2. Rozstrzygnąć, dla jakich $n \geqslant 3$ naturalnych istnieją liczby naturalne x i y takie, że $7x^2 + y^2 = 2^n$.

3. Okręgi ω_1 i ω_2 o środkach odpowiednio O_1 i O_2 są styczne zewnętrznie w C. Prosta l jest wspólną styczną tych okręgów w punkcie C. Okrąg ω o środku w O jest styczny zewnętrznie do okręgów ω_1 i ω_2, zaś odcinek AB jest średnicą okręgu ω prostopadłą do prostej l (punkt A leży po tej samej stronie prostej l co punkt O_1). Wykazać, że proste AO_2, BO_1 i l mają punkt wspólny.

4. W wypukłym czworokącie $ABCD$ zachodzi warunek $\measuredangle ABC + \measuredangle BCD < \pi$. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E. Wykazać, że $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$AC^2 = CD \cdot CE - AB \cdot AE.$$

5. Znaleźć wszystkie pary liczb pierwszych p i q, spełniających warunek:

$$pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q).$$

6. Ciąg a_n liczb naturalnych, w którym $a_0 = 0$, spełnia zależność:

$$a_n = n - a_{a_n}.$$

Wykazać, że

(a) $a_{n+1} \geqslant a_n$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

(b) Nie istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $a_n = a_{n+1} = a_{n+2}$.

7. Znajdź wszystkie ciągi liczb nieujemnych $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ spełniające równości:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 96, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 144, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 216.$$

8. W czworościanie $ABCD$ zachodzi: $\measuredangle ACD = \measuredangle BAC$ i $\measuredangle ABD = \measuredangle BDC$. Wykazać, że $AB = CD$.

9. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$ takich, że $\sum_{i=1}^{n} x_i = x$ zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i(x - x_i)} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x(x - x_i)}.$$

10. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c będących bokami trójkąta zachodzi nierówność:

$$\sqrt{a + b - c} + \sqrt{a - b + c} + \sqrt{-a + b + c} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$