Mecz matematyczny

grupa młodsza

piątek, 29 września 2006

1. Koło zostało podzielone na $2n$ sektorów przy czym n pomalowanych jest na biało i n na zielono. Wybieramy dowolny biały sektor i przypisujemy mu numer 1. Następnie numerujemy białe sektory liczbami od 2 do n zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Analogicznie postępujemy z sektorami zielonymi tylko numerujemy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (sektor o numerze 1 też wybieramy). Pokazać, że niezależnie od wyboru sektorów z numerem jeden istnieje półkole zawierające wszystkie liczby od 1 do n.

2. Okręgi c_i i c_2 o środkach O_1 i O_2 przecinają się w punktach A i B. Prosta l przechodząca przez punkt A przecina odpowiednio okręgi c_1 i c_2 w drugich punktach C i D. Proste CO_1 i DO_2 przecinają się w punkcie P, a prosta m przechodząca przez P i prostopadła do CD przecina prostą AB w punkcie Q. Dowieść, że punkty P, D, Q, C, B leżą na jednym okręgu.

3. Trójkąt równoboczny podzielono na 36 mniejszych trójkątów równobocznych. W każdym z wierzchołków tych trójkątów siedzi żuczek. Żuczki poruszają się w następujący sposób: w każdym ruchu idą jeden odcinek do przodu a następnie skręcają w prawo lub w lewo o 60 lub 120 stopni. Udowodnić, że kiedyś dwa żuczki się spotkają.

4. Udowodnij, że dla każdego $n \geqslant 36$ da się przedstawić jedynkę jako sumę n odwrotności sześcianów liczb naturalnych.

5. W kuli o promieniu 7 wybrano 1001 punktów. Pokazać, że istnieje powłoka kulista o promieniu wewnętrznym 2 i zewnętrznym 3, która zawiera co najmniej 20 z tych punktów.

6. Znaleźć stałą K taką, że dla dowolnych a, b, c dodatnich, spełniających warunki:

$$\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} \in \langle \frac{3}{4}, \frac{4}{3} \rangle$$

Zachodzi

$$Kabc \geqslant a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2$$

oraz stała K jest mniejsza lub równa niż stała zaproponowana przez drużynę przeciwną.

7. Czarnoksiężnik Hofman powierza swojemu uczniowi nieskończony magiczny wzór składający się z par liter AB i BA. Po całym dniu przepisywania uczeń postanawia zastąpić każdą parę AB literą A zaś parę BA literą B. Ze zdziwieniem zauważył, że po zamianie wzór nie zmienił się. Jakie litery we wzorze są na miejscu $2006, 2007, 2008, 2009$, jeśli pierwszą literą jest A?

8. Niech $W_k(n)$ oznacza liczbę podziałów liczby n na sumę dodatnich składników większych bądź równych k, zaś $M_k(n)$ mniejszych bądź równych k, w szczególności $W_k(0) = M_k(0) = 1$ dla $k > 0$. Udowodnić, że dla $n > 0$ zachodzi:

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k(n-k) - W_k(n-k)) = 0$$

9. Niech ABC będzie trójkątem w którym $AB \neq BC$. Prosta styczna do okręgu opisanego na tym trójkącie w punkcie A przecina prostą BC w punkcie D. Punkty E i F są leżą odpowiednio na symetralnych odcinków AB i AC oraz $BE \perp BC$ i $CF \perp BC$. Pokazać, że punkty D, E, F są współliniowe.

10. Punkt M leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC. $MA^2 + MB^2 = MC^2$. Znaleźć miarę kąta $\angle AMB$.

11. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b = 1$. Pokazać, że zachodzi nierówność:

$$a + c \geqslant \sqrt{abc(1 + c)}$$

Mecz matematyczny

grupa starsza

piatęk, 29 września 2006

1. W kuli o promieniu 7 wybrano 1001 punktów. Pokazać, że istnieje powłoka kulista o promieniu wewnętrznym 2 i zewnętrznym 3, która zawiera co najmniej 20 z tych punktów.

2. Znaleźć stałą K taką, że dla dowolnych a, b, c dodatnich, spełniających warunki:

$$\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} \in \langle\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\rangle$$

Zachodzi

$$Kabc \geqslant a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2$$

oraz stała K jest mniejsza lub równa niż stała zaproponowana przez drużynę przeciwną.

3. Czarnoksiężnik Hofman powierza swojemu uczniowi nieskończony magiczny wzór składający się z par liter AB i BA. Po całym dniu przepisywania uczeń postanawia zastąpić każdą parę AB literą A zaś parę BA literą B. Ze zdziwieniem zauważył, że po zamianie wzór nie zmienił się. Jakie litery we wzorze są na miejscu $2006, 2007, 2008, 2009$, jeśli pierwszą literą jest A?

4. Niech $W_k(n)$ oznacza liczbę podziałów liczby n na sumę dodatnich składników większych bądź równych k, zaś $M_k(n)$ mniejszych bądź równych k, w szczególności $W_k(0) = M_k(0) = 1$ dla $k > 0$. Udowodnić, że dla $n > 0$ zachodzi:

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k(n-k) - W_k(n-k)) = 0$$

5. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ na boku AB istnieje taki punkt F, że zachodzą równości kątów: $\angle ECF = \angle ADE$ oraz $\angle CEF = \angle BDC$. Pokazać, że wówczas $\angle BCD + \angle DEA = 180°$.

6. Znaleźć wszystkie liczby pierwsze nieparzyste p dla których liczby $1, 2, 3, \ldots, (p-1)$ da się tak poparować, by istniała taka liczba s, że w każdej parze (a, b) zachodziło $p | bs^2 - a$ lub $p | as^2 - b$.

7. Niech $x \star y$ oznacza $\frac{x+y}{1+xy}$. Obliczyć:

$$(((\ldots(((2 \star 3) \star 4) \star 5) \ldots) \star 1993) \star 1994) \star 1995$$

8. W przestrzeni kąty $\angle AOB$ i $\angle COD$ są proste i nie leżą w jednej płaszczyźnie. Płaszczyzny AOD i COB przecinają się na prostej k. Płaszczyzny AOC i BOD przecinają się na prostej l. Pokazać, że proste k i l są prostopadłe.

9. Niech ciąg $x_0, x_1, x_2, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem liczb całkowitych nieujemnych o takiej własności, że dla każdego k całkowitego nieujemnego liczba wyrazów ciągu nie przekraczających k jest skończona i nazywamy ją y_k. Pokazać, że dla dowolnych m, n całkowitych dodatnich zachodzi:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \geqslant (n+1)(m+1)$$

10. Niech S będzie zbiorem o mocy n zaś $A_1, A_2, \ldots, A_k$ będzie ciągiem jego podzbiorów. Pokazać że jeśli dla każdej pary elementów $x, y \in S$ istnieją taki indeks i, że ($x \in A_i$ oraz $y \in S \setminus A_i$) lub ($x \in S \setminus A_i$ oraz $y \in A_i$), to $k \geqslant \log_2 n$.

11. Każdą z liczb od $1, 2, \ldots, 101$ umieszczono dokładnie 101 razy w polach tablicy o wymiarach 101×101 po jednej na każdym polu. Udowodnić, że istnieje wiersz lub też kolumna w której znajduje się conajmniej 11 różnych liczb.