Liga zadaniowa, seria II

Termin: 6.01.2010

1. Punkt D leży na boku AC trójkąta ABC. Okrąg o środku P opisany na trójkącie ABD jest styczny do prostej BC. Okrąg o środku Q opisany na trójkącie BCD jest styczny do prostej AB. Odcinki PQ i BD przecinają się w punkcie E. Udowodnić, że:

$$PQ \quad BD^2 = 2 \quad AB \quad BC \quad PE \quad QE.$$

2.Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich rzeczywistych x, y, z:

$$f(xy) + f(xz) \quad 2f(x)f(yz) \geqslant \frac{1}{2}.$$

3. Dany jest punkt M wewnątrz prostokąta $ABCD$ taki, że $\angle AMB + \angle CMD = 180$. Znaleźć $\angle ABM + \angle CDM$.

4. Dowieść, że jeżeli liczby naturalne a i b są względnie pierwsze, to zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{a \quad 1} \frac{bi}{a} = \sum_{i=1}^{b \quad 1} \frac{ai}{b} .$$

(*Uwaga:* $[x]$ *oznacza część całkowitą liczby* x.)

5. Na okręgu stoją jednakowe samochody. W każdym z nich jest pewna ilość paliwa. Łącznie mają go tyle, że wystarczy dokładnie na przejechanie jednego okrążenia. Pokazać, że istnieje samochód, który może rozpocząć podróż w pewnym i kierunku i zbierając paliwo z napotykanych samochodów, przejechać całą trasę (okrąg).

6. Na kółko matematyczne przyszło $2n$ osób. Dla dowolnej grupy A liczącej n osób istnieje taka osoba spośród pozostałych n osób, która zna wszystkich w A. Udowodnij, że na kółko przyszła osoba, która zna wszystkich uczestników (jeśli osoba x zna osobę y to osoba y zna osobę x).

7. Wykazać, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c są bokami trójkąta, to zachodzi nierówność:

$$a^2b(a \quad b) + b^2c(b \quad c) + c^2a(c \quad a) \geqslant 0.$$

Każde zadanie prosimy zapisywać jednostronnie na oddzielnej kartce.

Rozwiązania należy przynosić do sekretariatu do środy, 6.01.2010r., do 10.00. Powyższe zadania dostępne są na stronie wm.staszic.waw.pl/kolka/ i marta05.w.staszic.waw.pl/liga/. Wszystkie pytania i uwagi prosimy kierować na adres: m.kaminska@students.mimuw.edu.pl.

Miłej rozkminki i Wesołych Świąt;)!