

**Liga zadaniowa**  
**XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie**

**IV seria zadań**

Termin składania rozwiązań: 20 czerwca 2005 r., godz. 9:30

1. Dowieść, że jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą, a liczba całkowita  $m$  spełnia nierówność  $0 \leq m < p - 1$ , to  $p$  dzieli liczbę  $\sum_{j=1}^p j^m$ .

2. Niech  $S$  będzie sferą opisaną na czworościanie foremym o krawędzi długości większej od 1. Sferę  $S$  przedstawiono w postaci sumy czterech zbiorów. Udowodnić, że do pewnego z tych zbiorów należą takie punkty  $P$  i  $Q$ , że długość odcinka  $PQ$  przekracza 1.

3. Liczby nieujemne  $a_1, a_2, \dots, a_7, b_1, b_2, \dots, b_7$  spełniają warunek  $a_i + b_i \leq 2$  dla  $i = 1, 2, \dots, 7$ . Wykazać, że dla pewnych dwóch różnych liczb  $k, m \in \{1, 2, \dots, 7\}$  zachodzi nierówność

$$|a_k - a_m| + |b_k - b_m| \leq 1.$$

4. Dany jest czworościan  $ABCD$ . Dowieść, że krawędzie  $AB$  i  $CD$  są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w przestrzeni taki równoległobok  $CDPQ$ , że  $PA = PB = PD$  oraz  $QA = QB = QC$ .

5. W turnieju szachowym uczestniczy 66 zawodników, każdy z każdym innym rozgrywa jedną partię, rozgrywki odbywają się w czterech miastach. Udowodnić, że pewna trójka zawodników rozgrywa wszystkie partie między sobą w tym samym mieście.

**Zarys regulaminu**

1. Ligę organizuje bliżej nieokreślony zbiór absolwentów XIV LO, zwany dalej Jury.

2. Każdy może uczestniczyć w lidze przez składanie własnych rozwiązań dowolnie wybranych z powyższych zadań na piśmie do sekretariatu Szkoły w zadanym terminie. Nie należy pisać rozwiązania jednego zadania na dwóch stronach tej samej kartki.

3. Otrzymane rozwiązania będą oceniane na 0, 2, 5 lub 6 punktów. Suma uzyskanych punktów we wszystkich seriach w danym roku szkolnym jest przedmiotem rankingu. W rankingu uwzględniane będą tylko osoby, które w trzech ostatnich seriach złożyły przynajmniej jedno rozwiązanie.

4. W przypadku, gdy teza zadania jest fałszywa, podanie kontrprzykładu wystarcza do uzyskania 6 punktów za rozwiązanie tego zadania. Oprócz tego można dostać *dodatkowo* 0, 2, 5 lub 6 punktów za uzupełnienie założeń i rozwiązanie poprawionego zadania.

5. Ostateczna interpretacja niniejszego zarysu regulaminu należy do Jury.