Liga zadaniowa
XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

III seria zadań

Termin składania rozwiązań: 30 maja 2005 r., godz. 9:30

1. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej k istnieją dwie kolejne liczby naturalne, z których każda ma co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

2. Punkty A i B leżą na okręgu o środku O, przy czym AB nie jest jego średnicą. Niech C będzie takim punktem tego okręgu, że AC połowi OB. Proste AB i OC przecinają się w punkcie D, proste BC i AO przecinają się w punkcie F. Wykazać, że $AF = CD$.

3. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Wykazać, że

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geqslant \frac{3}{2}.$$

4. Odcinki AA', BB', CC' są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Punkty D, E, F są odpowiednio środkami boków BC, CA, AB. Punkty K, L, M są odpowiednio środkami odcinków AA', BB', CC'. Wykazać, że proste DK, EL, FM przecinają się w jednym punkcie.

5. Funkcja f jest określona w zbiorze liczb całkowitych dodatnich przez równania: $f(1) = 1$, $f(3) = 3$ oraz $f(2n) = f(n)$, $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$, $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$ dla wszystkich liczb całkowitych $n > 0$. Wyznaczyć liczbę liczb całkowitych n spełniających warunki $0 < n \leqslant 2005$ oraz $f(n) = n$.

Zarys regulaminu

1. Ligę organizuje bliżej nieokreślony zbiór absolwentów XIV LO, zwany dalej Jury.

2. Każdy może uczestniczyć w lidze przez składanie własnych rozwiązań dowolnie wybranych z powyższych zadań na piśmie do sekretariatu Szkoły w zadanym terminie. Nie należy pisać rozwiązania jedego zadania na dwóch stronach tej samej kartki.

3. Otrzymane rozwiązania będą oceniane na 0, 2, 5 lub 6 punktów. Suma uzyskanych punktów we wszystkich seriach w danym roku szkolnym jest przedmiotem rankingu. W rankingu uwzględniane będą tylko osoby, które w trzech ostatnich seriach złożyły przynajmniej jedno rozwiązanie.

4. W przypadku, gdy teza zadania jest fałszywa, podanie kontrprzykładu wystarcza do uzyskania 6 punktów za rozwiązanie tego zadania. Oprócz tego można dostać *dodatkowo* 0, 2, 5 lub 6 punktów za uzupełnienie założeń i rozwiązanie poprawionego zadania.

5. Ostateczna interpretacja niniejszego zarysu regulaminu należy do Jury.