

Liga zadaniowa
XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

II seria zadań

Termin składania rozwiązań: 9 maja 2005 r., godz. 9:30

1. Rozwiązać w liczbach naturalnych układ równań

$$\begin{cases} x^2 + 3y = u^2 \\ y^2 + 3x = v^2. \end{cases}$$

2. Czworokąt $PQRS$ jest wpisany w okrąg, przy czym $\sphericalangle PSR = 90^\circ$. Niech H i K będą odpowiednio rzutami prostokątnymi punktu Q na proste PR i PS . Udowodnić, że prosta HK połowi odcinek QS .

3. Wykazać, że dla liczb dodatnich spełniających warunek $a + b + c = 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^9 + b^9}{a^7 + b^7} + \frac{b^7 + c^7}{b^5 + c^5} + \frac{c^5 + a^5}{c^3 + a^3} \geq \frac{1}{3}$$

4. Przekątne czworokąta $ABCD$, wpisanego w okrąg o środku O , przecinają się w punkcie Q . Punkty K, L, M, N są kolejno środkami okręgów opisanych na trójkątach QAB, QBC, QCD, QDA . Proste KM i LN przecinają się w punkcie P . Dowieść, że punkty O, P, Q są współliniowe.

5. Na płaszczyźnie dany jest zbiór złożony z $2n$ punktów ($n \geq 2$), których obie współrzędne są liczbami całkowitymi z przedziału $[1, n]$. Dowieść, że pewne cztery punkty tego zbioru są wierzchołkami równoległoboku (niezdegenerowanego).

Zarys regulaminu

1. Ligę organizuje bliżej nieokreślony zbiór absolwentów XIV LO, zwany dalej Jury.
2. Każdy może uczestniczyć w lidze przez składanie własnych rozwiązań dowolnie wybranych z powyższych zadań na piśmie do sekretariatu Szkoły w zadanym terminie. Nie należy pisać rozwiązania jednego zadania na dwóch stronach tej samej kartki.
3. Otrzymane rozwiązania będą oceniane na 0, 2, 5 lub 6 punktów. Suma uzyskanych punktów we wszystkich seriach w danym roku szkolnym jest przedmiotem rankingu. W rankingu uwzględniane będą tylko osoby, które w trzech ostatnich seriach złożyły przynajmniej jedno rozwiązanie.
4. W przypadku, gdy teza zadania jest fałszywa, podanie kontrprzykładu wystarcza do uzyskania 6 punktów za rozwiązanie tego zadania. Oprócz tego można dostać *dotatkowo* 0, 2, 5 lub 6 punktów za uzupełnienie założeń i rozwiązanie poprawionego zadania.
5. Ostateczna interpretacja niniejszego zarysu regulaminu należy do Jury.