Liga zadaniowa
XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

I seria zadań

Termin składania rozwiązań: 15 kwietnia 2005 r.

1. Ciąg (a_n) liczb dodatnich spełnia dla każdego naturalnego $k \geqslant 1$ warunek

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geqslant \sqrt{k}.$$

Udowodnij, że dla każdego naturalnego $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 > \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

2. Okręgi S_1 i S_2 styczne do siebie zewnętrznie w punkcie K są styczne wewnętrznie do okręgu S odpowiednio w punktach A_1 i A_2. Wspólna styczna do S_1 i S_2 poprowadzona przez K przecina okrąg S w punkcie P. Ponadto, prosta PA_1 przecina okrąg S_1 w punkcie B_1, zaś prosta PA_2 przecina okrąg S_2 w punkcie B_2. Udowodnij, że prosta B_1B_2 jest wspólną styczną okręgów S_1 i S_2.

3. Liczby od 1 do 101 wypisano w dowolnym porządku. Udowodnić, że można z tych 101 liczb wykreślić 90 tak, żeby pozostałych 11 tworzyło ciąg monotoniczny.

4. Na płaszczyźnie umieszczono 6 punktów w ten sposób, że każde 3 spośród nich są wierzchołkami trójkąta o bokach różnej długości. Udowodnić, że najkrótszy bok pewnego z tych trókątów jest zarazem najdłuższym bokiem innego z nich.

5. Niech n oznacza łączną liczbę włosów na głowach wszystkich ludzi żyjących obecnie na Ziemi. Rozstrzygnij, co jest większe: długość zapisu dziesiętnego liczby 2^n czy liczba końcowych zer w zapisie dziesiętnym liczby $n!$.

Zarys regulaminu

1. Ligę organizuje bliżej nieokreślony zbiór absolwentów XIV LO, zwany dalej Jury.

2. Każdy może uczestniczyć w lidze przez składanie własnych rozwiązań dowolnie wybranych z powyższych zadań na piśmie do sekretariatu Szkoły w zadanym terminie.

3. Otrzymane rozwiązania będą oceniane na 0, 2, 5 lub 6 punktów. Suma uzyskanych punktów we wszystkich seriach w danym roku szkolnym jest przedmiotem rankingu. W rankingu uwzględniane będą tylko osoby, które w trzech ostatnich seriach złożyły przynajmniej jedno rozwiązanie.

4. W przypadku, gdy teza zadania jest fałszywa, podanie kontrprzykładu wystarcza do uzyskania 6 punktów za rozwiązanie tego zadania. Oprócz tego można dostać *dodatkowo* 0, 2, 5 lub 6 punktów za uzupełnienie założeń i rozwiązanie poprawionego zadania.

5. Ostateczna interpretacja niniejszego zarysu regulaminu należy do Jury.