Zadania łatwe, ale nie wszystkie ;)

1. Pokazać, że dla każdego n całkowitego dodatniego zachodzi $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}^2 = n\binom{2n-1}{n}$.

2. Pokazać, że jeśli liczby rzeczywiste x, y, z, a spełniają układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

to co najmniej jedna z liczb x, y, z jest równa a.

3. Liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sumują się do n. Znaleźć minimalną wartość wyrażenia:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + (2i-1)^2}$$

.

4. Okręgi Γ_1, Γ_2 o środkach w O_1 i O_2 odpowiednio przecinają się w punktach A i B. Prosta przechodząca przez A przecina Γ_1 ponownie w D i Γ_2 ponownie w E. Proste DO_1 i EO_2 przecinają się w punkcie P, zaś prosta przechodząca przez P i prostopadła do DE przecina prostą AB w punkcie Q. Pokazać, że punkty B, D, Q, E, P leżą na jednym okręgu.

5. W trójkącie ostrokątnym ABC na boku BC obrano punkt N. Symetralne odcinków BN i CN przecinają boki AB i AC odpowiednio w punktach G i H. Pokazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na okręgu opisanym na trójkącie AGH.

6. Z szachownicy 29×29 wycięto 99 kwadratów 2×2 o bokach równoległych do boku szachownicy. Pokazać, że da się wyciąć jeszcze jeden taki kwadrat.

7. Wielomian $W(x)$ jest siódmego stopnia, ma wszystkie współczynniki całkowite i dla siedmiu różnych argumentów całkowitych przyjmuje wartości 1 lub (-1). Pokazać, że $W(x)$ nie da się przedstawić w postaci iloczynu dwóch wielomianów o dodatnich stopniach i współczynnikach całkowitych.

8. Czy istnieje wielościan mający nieparzystą liczbę ścian, które wszystkie są trójkątami?