

Kwiecień plecień

22.04.2009

1. W trójkącie ABC środkowa poprowadzona z wierzchołka A przecina bok BC w punkcie M . Pokazać, że jeśli wysokość opuszczona z C połowi AM , to bok AB dzieli w stosunku $1 : 2$.

2. Iloczyn trzech nieujemnych liczb a, b, c jest równy 1. Wykazać, że

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ca}{1+c} \geq 3.$$

3. Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta. Czy z odcinków długości $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ można zbudować trójkąt?

4. Na tablicy zapisano 666 zer, 666 jedynek i 666 dwójek. Ruch polega na starciu trzech liczb a, b, c i napisaniu liczby $-2a + 4b + c$. Rozstrzygnąć, czy można doprowadzić do sytuacji, w której na tablicy pozostanie:

- (i) dokładnie 2 liczby równe 1;
- (ii) tylko jedna liczba równa 1;
- (iii) tylko jedna liczba równa 0;

5. Na każdym polu szachownicy 8 na 8 stoi pionek. Możemy wykonać następującą operację: wybieramy trzy pola znajdujące się w jednym rzędzie (bądź kolumnie) i stykające się bokami. Jeśli na każdym ze skrajnych pól stoi (co najmniej jeden) pionek, to możemy wziąć po jednym pionku ze skrajnych pól i przestawić je na pole środkowe. Czy możemy doprowadzić do pozycji, w której wszystkie pionki znajdują się na jednym polu szachownicy?

6. Mamy 1 dukata (i 0 talarów). W kantorze pierwszym możemy wymienić 1 dukata na 10 talarów, natomiast w kantorze drugim 1 talara na 10 dukatów. Czy możemy tak wymieniać pieniądze, aby na końcu mieć tyle samo dukatów, co talarów?