

KÓŁECZKO O KOMBINOWANIU (1.03.2007)

ZADANIA

1. Ile jest kolorowań planszy $n \times n$, takich że w każdym kwadracie 2×2 są dokładnie 2 pola białe i 2 pola różowe?
2. Ile jest funkcji niemalejących ze zbioru $A = \{1, 2, \dots, n\}$ w zbiór $B = \{1, 2, \dots, m\}$?
3. Niech $k, n \in \mathbb{N}$. Ile jest rozwiązań nierówności $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq n$ w liczbach całkowitych nieujemnych?
4. Niech $P(n)$ będzie liczbą uporządkowanych podziałów liczby n (np. $P(3) = 4$, bo $3 = 3 = 1 + 2 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$). Znaleźć wzór jawny $P(n)$.
5. Fistach lubi pałować nierównościami. Pewnego razu zastanowił się (co się Fistachowi czasem zdarza) jak w łatwy sposób sprawdzić, czy w miarę dobrze wymnożył. Pomóż Fistachowi i powiedz, ile różnych wyrażeń otrzyma wymnażając i redukując $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$? Np. dla $k = 2, n = 2$ otrzyma 3 różne wyrażenia $a_1^2, 2a_1a_2, a_2^2$.
6. W podziemiach swego różowego domku Gosia tortutuje swoją tresowaną różową kameleony (których jest n). Usiadła z nimi w kółeczku i wzięła $n + 1$ PKdTRKG (Paczek Karmy dla Tresowanych Różowych Kameleonów Gerbera). Następnie zaczęła zabawę: w każdym ruchu Gosia wybiera coś różowego (czyli siebie lub kameleona) posiadającego przynajmniej dwie PKdTRKG. Wybrany gracz daje po jednym PKdTRKG każdemu z sąsiadów. Dla jakich n Gosia może rozdystrybuować PKdTRKG tak, by każdy gracz miał po jednym? I dlaczego Gosia nosi takie fajne różowe butki?
7. Niech a_1, a_2, \dots, a_n będzie niemalejącym ciągiem liczb naturalnych. Niech b_i będzie liczbą wyrażeń ciągu a_n większych bądź równych i . Udowodnij, że: $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m b_i$, biorąc pod uwagę, że Redlik ma fajne spodnie.