

## KÓŁECZKO O KOMBINOWANIU (6.02.2008)

### ZADANIA

1. Wyznaczyć liczbę podzbiorów zbioru  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ , w których równanie  $x + y = 2n + 1$  nie ma rozwiązań.
2. Na każdym polu nieskończonej szachownicy napisano liczbę całkowitą, przy czym każda napisana liczba występuje na tej szachownicy tylko raz. Dowieść, że dla każdej liczby  $a \in \mathbb{R}$  istnieją takie dwa sąsiednie pola szachownicy, że różnica liczb napisanych na tych polach jest większa niż  $a$ .
3. Niech  $k, n \in \mathbb{N}$ . Ile jest rozwiązań nierówności  $x_1 + x_2 + \dots + x_k < n$  w liczbach całkowitych nieujemnych? A  $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$ ?
4. Dany jest 541-wyrazowy ciąg paami różnych liczb rzeczywistych. Dowieść, że z tego ciągu można wybrać 20-wyrazowy podciąg rosnący lub 27-wyrazowy podciąg malejący.
5. Jaś chce pokryć kafelkami podłogę swojej łazienki mającej kształt prostokąta  $m \times n$ . ma w tym celu do zużycia  $mn$  kafelków białych i  $mn$  czarnych, każdy w kształcie trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnej długości 1. Chce z nich ułożyć całe pokrycie podłogi łazienki tak, by każdy kafelek sąsiedował bokami tylko z kafelkami innego koloru. Na ile sposobów może to zrobić?
6. Niech  $n, p, r$  będą liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że  $n \geq p+r$ . Oblicz  $\sum_{i=0}^n \binom{i}{p} \binom{n-i}{r}$ .
7. Ufoludek zaatakował dom (złożony z piwnicy, parteru, pierwszego piętra oraz dachu) i zaczyna poruszać się w nim losowo zaczynając od parteru, przy czym za każdym razem kiedy wyjdzie na dach nadaje sygnał za pomocą jednego ze swoich 2 nadajników, a gdy pojawi się w piwnicy przeszukuje ją za pomocą jednego z dwóch rozpoznawaczy rzeczy nieufolskich (czynności te wykonuje nawet, jeśli kończy tam swoją trasę). Ile jest możliwych tras ufoludka, jeśli  $n$  razy użył schodów (dwie trasy są identyczne jeśli mają tę samą kolejność odwiedzanych pięter i używanych urządzeń)?