Trochę teorii liczb i kombinatoryki

1. Niech $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz f będzie dowolną funkcją $A \longrightarrow A$. Pokazać, że istnieje takie $k \in \mathbb{Z}^+$, że dla każdego $x \in A$: $\underbrace{f(f(\ldots(f(x)\ldots))}_{2k} = \underbrace{f(f(\ldots(f(x)\ldots))}_{k}$.

2. Obliczyć $\sum_{i,j,k \in \mathbb{Z}} \binom{n}{i+j}\binom{n}{j+k}\binom{n}{k+i}$.

3. Liczby rzeczywiste dodatnie x, y, z sumują się do 1. Obliczyć minimalną wartość wyrażenia:

$$(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y})(1 + \frac{1}{z})$$

4. W trójkącie ABC okręg wpisany jest styczny do boków BC, AC, AB odpowiednio w punktach K, L, M. Na odcinku LM obrano takie punkty D i E, że $LD = DK$ oraz $ME = EK$. Pokazać, że $DE = BC \cos \frac{\angle B + \angle C}{2}$.

5. Dla dowolnych $m, n \in \mathbb{Z}^+$ obliczyć:

$$\sum_{i=0}^{n} \lfloor \frac{im}{n} \rfloor + \sum_{i=0}^{m} \lfloor \frac{in}{m} \rfloor$$

6. Znaleźć liczbę takich podzbiorów p-elementowych zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2p-1, 2p\}$ których suma elementów dzieli się przez p.

7. Udowodnić, że nie istnieją dwie liczby całkowite dodatnie $m < n$, że $\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{n}$ jest całkowite.

8. Pokazać, że jeśli liczby całkowite dodatnie spełniają równość $ab = cd$ to zachodzi:

$$\frac{NWD(a,c) \cdot NWD(a,d)}{NWD(a,b,c,d)} = a$$