

## KÓŁECZKO Z KOLOROWANEK I NIEZMIENNIKÓW

1. Na każdym polu szachownicy  $8 \times 8$  napisano liczbę całkowitą. Dozwolone są następujące operacje:

- wszystkie liczby zawarte w pewnym kwadracie  $3 \times 3$  zwiększamy o 1,
- wszystkie liczby zawarte w pewnym kwadracie  $4 \times 4$  zwiększamy o 1.

Czy niezależnie od tego, jakie były wyjściowe liczby możemy po wykonaniu pewnej ilości operacji otrzymać szachownicę wypełnioną wielokrotnościami trójki?

2. Mamy szachownicę  $8 \times 8$  z wyciętymi dwoma rogami. Czy da się ją pokryć płytkami  $2 \times 1$  jeśli:

- wycięte rogi są sąsiednie,
- wycięte rogi są przeciwległe?

3. Czy można pokryć szachownicę o wymiarach  $13 \times 13$  płytkami o  $4 \times 1$  w taki sposób, że tylko środkowe pole nie jest zakryte?

4. W szachownicy  $19 \times 19$  wybieramy ściśle wewnątrz kwadrat  $16 \times 16$ . Czy da się pokryć wewnętrzny kwadrat rozłącznymi prostokątami  $1 \times 5$  zawartymi w większym kwadracie?

5. Mamy dany sześcián  $100 \times 100 \times 100$ . Czy można wypełnić go klockami  $1 \times 1 \times 51$  i  $1 \times 1 \times 53$ ?

6. Dowieść że kwadratu o boku 9 nie można podzielić na prostokąty o wymiarach  $5 \times 1$  i  $6 \times 1$ .

7. Mamy 17 skarpetek żółtych, 15 skarpetek czerwonych i 13 niebieskich. Ruch polega na zmianieniu dwóch skarpetek różnych kolorów na parę skarpetek w tym trzecim kolorze. Czy możemy osiągnąć wszystkie skarpetki w jednym kolorze?

8. W każdym wierzchołku 18-kąta foremego leży kamień. Ruch polega na przełożeniu dowolnych 2 kamieni na sąsiadujący wierzchołek. Czy można uzyskać w ten sposób wszystkie kamienie w 1 wierzchołku?