

Kółko z Dirichleta

1. W trójkącie równobocznym o boku 12 dane jest 300 punktów. Pokazać, że pewne trzy z nich tworzą trójkąt (być może zdegenerowany) o obwodzie co najwyżej 3.

2. W kwadracie o boku 4 danych jest 17 punktów. Pokazać, że istnieją wśród nich dwa odległe o co najwyżej $\sqrt{2}$.

3. Dane są ciągi liczb (x_1, x_2, \dots, x_7) oraz (y_1, y_2, \dots, y_7) , takie że dla każdego i zachodzi:

$$\begin{cases} x_i \geq 0 \\ y_i \geq 0 \\ x_i + y_i \leq 1 \end{cases}$$

Pokazać, że istnieją indeksy k, l że zachodzi $|x_k - x_l| + |y_k - y_l| \leq \frac{1}{2}$.

4. Dany jest pięciokąt $ABCDE$, którego wierzchołki umieszczone są w punktach kratowych. Pokazać, że we wnętrzu lub na boku pięciokąta istnieje jeszcze co najmniej jeden różny od wierzchołków punkt kratowy.

5. Pani M***** (zwana w niektórych kręgach Fredkiem), jak zawsze przed lekcją polskiego, pragnie uszczęśliwić świat. Świat zaś jest sferą o promieniu 1, a pani M***** uszczęśliwia go poprzez swe czarujące spojrzenie z dowolnego punktu przestrzeni poza kulą (widzi tylko tę część sfery, która nie jest zasłaniana przez inną część sfery). Ile razy, co najmniej, pani M***** musi spojrzeć, aby uszczęśliwić wszystkich swych potencjalnych uczniów?

6. Ze zbioru liczb od 1 do 100 wybrano 26 liczb. Pokazać, że spośród tych 26 da się wybrać niepusty podzbiór o iloczynie będącym kwadratem liczby całkowitej.

7. W Księstwie Hofmańskim jest 6 pomników Gozera Wielkiego. Pomiedzy każdymi dwoma istnieje bezpośrednie połączenie obsługiwane przez dokładnie jednego z dwóch przewoźników. Pokazać, że istnieją 3 pomniki, pomiedzy którymi połączenia obsługuje ten sam przewoźnik.

8. Dzięki UE Księstwo Hofmańskie dostało dotacje i zwiększyło liczbę pomników do 66 zaś liczbę przewoźników do 4. Pokazać, że również w tym przypadku teza zadania 7 jest spełniona.