Twierdzenia z wielomianów

TW. BEZOUT Niech $P(x)$ i $Q(x)$ będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych, takie, że $deg(P) \geqslant \deg(Q)$. Wówczas istnieje dokładnie jedna para wielomianów $W(x)$, $V(x)$, że dla każdego x zachodzi:

$$P(x) = W(x) \cdot Q(x) + V(x)$$

oraz $deg(V) < deg(Q)$.

DODATEK.1. Jeśli wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$ miały wspólczynniki całkowite, to wielomiany $W(x)$ i $V(x)$ również będą miały współczynniki całkowite.

DODATEK.2. W szczególności jeśli $P(x)$ ma wspólczynniki całkowite zaś $Q(x) = x - a$ to zachodzi:

$$P(x) = (x - a) \cdot W(x) + P(a)$$

Zaś $W(x)$ i $P(a)$ to jedyna taka możliwa para.

WZORY VIETE'A Jeśli wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ma n pierwiastków rzeczywistych $p_1, p_2, \ldots, p_n$ to zachodzi:

$$a_{n-1} = -\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{a_n}$$

$$a_{n-2} = \frac{p_1 p_2 + p_1 p_3 + \ldots + p_{n-1} p_n}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$a_0 = (-1)^n \cdot \frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{a_n}$$

FAKCIK O PODZIELNOŚCI Dany jest wielomian $W(x)$ mający współczynniki całkowite. Wówczas dla każdego k naturalnego zachodzi:

$$n \equiv m \Rightarrow W(n) \equiv W(m)$$

Rozpatrując to w podzielności przez k.