Kółko wakacyjne

1. Pokazać, że dla każdej liczby pierwszej p zachodzi:

$$p|(p-1)!+1$$

2. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie D. Prosta k jest styczna do okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach A i B. Odcinek AC jest średnicą okręgu o_1. Prosta l przechodzi przez punkt C i jest styczna do okręgu o_2 w punkcie E. Wykazać, że $AC = CE$.

3. Pewna nauczycielka zrobiła klasie 1A test, w którym można było dostać n punktów. Jeden punkt otrzymała połowa klasy i jeszcze jedna osoba, dwa punkty połowa reszty i jeszcze dwie osoby itd. aż wreszcie n punktów połowa reszty i jeszcze n osób. Jeśli nikt nie dostał zera punktów, to ile osób jest w klasie 1A?

4. Pokazać, że jeśli a, b, c są bokami trójkąta, to zachodzi:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc$$

5. Na ile sposobów da się prostakąt 2 na n pokryć prostokątami 2 na 1?

6. W trójkącie ABC umieszczono trzy okręgi o równych promieniach, takie, że każdy z nich jest styczny do innej pary boków trójkąta oraz wszystkie przechodzą przez pewien punkt D. Pokazać, że D, środek okręgu wpisanego i środek okręgu opisanego na trójkącie leżą na jednej prostej.