Kółko z okręgu Apoloniusza i inszych rzeczy

1. Na okręgu o środku w O i promieniu R obrano punkty A i D. Na półprostej OD obrano punkty B,C, takie, że $OB \cdot OC = R^2$. Pokazać, że prosta AD jest dwusieczną kąta BAC.

2. W trójkącie ABC niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta C z bokiem AB. Przez P oznaczmy pole trójkąta ABC. Udowodnić, że zachodzi nierówność

$$2P(\frac{1}{AD} - \frac{1}{BD}) \leqslant AB$$

.

3. Wewnątrz trójkąta ABC dany jest punkt P, taki, że $\angle APB = \angle ACB + 90°$. Pokazać, że styczne do okręgów opisanych na trójkątach CPA i CPB poprowadzone w punkcie C są prostopadłe.

4. Wewnątrz trójkąta ABC dany jest punkt P, taki, że $\angle APB = \angle ACB + 90°$. Ponadto $AC \cdot BP = BC \cdot AP$. Obliczyć $\frac{PC \cdot AB}{AC \cdot BP}$.

5. Skonstruować trójkąt ABC mając dane boki AB i AC oraz kąt $\angle AMB$ gdzie M jest środkiem boku BC.

6. Trójkąt ma boki a, b, c oraz pole S. Pokazać, że:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$$

.