

Zadania różne, głównie teoria liczb

1. Dla każdego n naturalnego znaleźć sumę:

$$\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n+4}{8} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \rfloor + \dots$$

2. Niech $k = 4444^{4444}$ zaś $S(x)$ oznacza sumę cyfr liczby x w systemie dziesiętnym. Policz $S(S(S(k)))$.

3. Wśród liczb od 1 do $2n$ wybrano $n+1$. Pokaż, że są wśród nich dwie względnie pierwsze.

4. Wśród liczb od 1 do $2n$ wybrano $n+1$. Pokaż, że są wśród nich dwie, z których jedna dzieli drugą.

5. Na płaszczyźnie dana jest skończona rodzina okręgów ograniczających figurę o polu 100. Pokazać, że da się wybrać spośród nich podzbiór rozłącznych okręgów o polu 10.

6. Na płaszczyźnie dana jest skończona rodzina trójkątów równobocznych ograniczających figurę o polu 16. Pokazać, że da się wybrać spośród nich podzbiór rozłącznych trójkątów o polu 1.

7. Pokazać, że w bryle o objętości 1000 da się wybrać 200 punktów, z których każde dwa są odległe o co najmniej 1.