Nierówności i nie tylko

piątek, 29 października 2004

21. Punkt K leży na boku DF trójkąta DEF. Niech R będzie takim punktem, że półprosta FE jest dwusieczną kąta DFR oraz

$$RF \cdot KD = KE^2 + KD \cdot KF.$$

Dowieść, że $\measuredangle FRE = \measuredangle DEK$.

22. Okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach C i D. Okręgi te leżą wewnątrz okręgu Ω i są do niego styczne odpowiednio w punktach A i B. Wspólna styczna do okręgów ω_1 i ω_2 jest styczna do nich odpowiednio w punktach E i F. Udowodnić, że proste AE, CD, BF przecinają się w punkcie leżącym na okręgu Ω.

23. Sfera s jest styczna do krawędzi AB, BC, CD i DA czworościanu $ABCD$. Wykazać, że punkty styczności leżą na jednej płaszczyźnie.

24. Okręgi ω_1, ω_2 i ω_3 są parami styczne zewnętrznie odpowiednio w punktach: ω_1 i ω_2 w A, ω_1 i ω_3 w B i ω_2 z ω_3 w C. Proste AB i AC przecinają okrąg ω_3 jeszcze w punktach odpowiednio D i E. Prosta DC przecina okrąg ω_2 w punktach C i F, prosta EB przecina okrąg ω_1 w punktach B i G. Wykazać, że punktych A, F i G są współliniowe.

25. W czworościanie $ABCD$ dany jest punkt P. Proste AP, BP, CP i DP przecinają przeciwległe ściany czworościanu odpowiednio w punktach K, L, M, N. Wykazać, że

$$\frac{AP}{PK} + \frac{BP}{PL} + \frac{CP}{PM} + \frac{DP}{PN} \geqslant 12.$$

26. W czworościanie foremnym $ABCD$ o boku 1 dany jest punkt P. Wykazać, że

$$AP + BP + CP + DP \leqslant 3.$$

27. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym, zaś P punktem w jego wnętrzu. Proste AP, BP, CP przecinają boki BC, AC i AB w punktach D, E, F. Udowodnić, że

$$DE \cdot EF \cdot FD \geqslant DB \cdot EC \cdot FA.$$

28. W trójkącie ABC niech I będzie środkiem okregu wpisanego, zaś punkty D, E, F będą przecieciami dwusiecznych kątów A, B, C trójkąta ABC z przeciwległymi bokami. Udowodnić, że

$$\frac{1}{4} < \frac{AI}{AD} \cdot \frac{BI}{BE} \cdot \frac{CI}{CF} \leqslant \frac{8}{27}.$$

29. Różne punkty A, B, C leżą na prostej k, a punkt P do prostej k nie należy. Punkty Q, R, S są środkami okręgów opisanych na trójkątach PAB, PBC, PCA. Wykazać, że punkty P, Q, R, S leżą na jednym okręgu.