Klasóweczka

piątek, 26 listopada 2004

41. Wykazać, że równanie

$$x^x = y^3 + z^3$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.

42. Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwa jest równość

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n}{k}.$$

43. W pewnej grupie kn osób każda osoba zna więcej niż $(k-1)n$ innych (k, n są liczbami naturalnymi). Wykazać, że można z tej grupy wybrać $k+1$ osób, z których każde dwie się znają.

44. W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku I, który jest styczny do boków AB, BC i CA odpowiednio w punktach M, N i K. Środkowa trójkąta ABC wypuszczona z wierzchołka B przecina prostą MN w punkcie D. Wykazać, że punkty D, I i K są współliniowe.

45. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie a, b, c spełniające zależności

$$a + b = NWD(a,b)^2, \quad c + b = NWD(c,b)^2, \quad a + c = NWD(a,c)^2.$$