Kółko gwiazdkowe. Wielomiany i nie tylko.

piątek, 17 grudnia 2004

61. Wielomian $w(x)$ stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych przyjmuje dla argumentów całkowitych wartości będące kwadratami liczb całkowitych. Wykazać, że wielomian $w(x)$ jest kwadratem pewnego wielomianu.

62. Stopień wielomianu $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych jest nieparzysty. Ponadto dla każdego x zachodzi równość:

$$P(x^2 - 1) = P(x)^2 - 1.$$

Wykazać, że dla każdego x zachodzi $P(x) = x$.

63. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania w liczbach rzeczywistych x, y, z układu równań

$$\begin{cases} 3(x^2 + y^2 + z^2) = 1 \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = xyz(x + y + z)^3. \end{cases} .$$

64. Udowodnić, że jeśli k jest dodatnią liczbą całkowitą i $k > 3$, to dla każdego wielomianu o współczynnikach całkowitych $W(x)$ takiego, że dla każdego $c \in \{0, 1, \ldots, k + 1\}$ zachodzi $0 \leqslant W(c) \leqslant k$, musi być $w(0) = W(1) = \ldots = W(k + 1)$.

65. Rozwiązać w liczbach dodatnich układ równań

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 12 \\ x + y + z + 2 = xyz \end{cases} .$$

66. Niech $P(x)$ będzie wielomianem takim, że dla każdego $x \geqslant 0$ zachodzi $P(x) > 0$. Wykazać, że istnieje takie naturalne n, że wielomian $P(x)(1+x)^n$ ma nieujemne współczynniki.

67. Dana jest liczba całkowita dodatnia k. Wykazać, że istnieje ciąg liczb całkowitych $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ taki, że $a_1 = k$ i dla każdego naturalnego n zachodzi

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \mid a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2.$$