Meksykańska geometria

piątek, 14 stycznia 2005

81. Dany jest czworokąt wypukły ABCD, w którym $AC \perp BD$. Punkty M, N, P, R są środkami odpowiednio boków AB, BC, CD i DA. Punkty W, X, Y, Z są rzutami punktów M, N, P, R na odpowiednio boki CD, DA, AB, BC. Wykazać, że punkty M, N, P, R, W, X, Y, Z leżą na jednym okręgu.

82. Rozważmy równoległobok $ABCD$. Punkt E jest takim punktem, że $BE = BC$ i B leży na odcinku AE. Prosta przechodząca przez punkt C prostopadła do BD przecina prostą przechodzącą przez E prostopadłą do AB w F. Wykazać, że $\measuredangle BAF = \measuredangle DAF$.

83. Wszystkie kąty ścian przy wierzchołku A czworościanu $ABCD$ są proste. Punkty X, Y i Z są środkami krawędzi BC, CD i DB. Wykazać, że czworościan $AXYZ$ ma równe pola ścian.

84. Rozważmy równoległobok $ABCD$. Okrąg ω jest opisany na trójkącie ABD. Przecina on proste BC i CD odpowiednio w punktach E i F. Wykazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie CEF leży na okręgu ω.

85. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkt P jest przecięciem jego przekątnych, a M środkiem boku CD. Okrąg przechodzący przez punkt P, styczny do CD w M przecina proste BD i AC w punktach Q i R odpowiednio (poza P). Punkt S jest takim punktem na przekątnej BD, że $BS = DQ$, punkt T takim punktem na AC, że $AT = RC$. Wykazać, że $ST \| AB$.

86. W trójkącie ABC zachodzi: $AB < AC$ i $\measuredangle BAC = 2\measuredangle ACB$. Punkt D jest takim punktem boku AC, że $CD = AB$. Punkty M i N są przecięciamy prostej przechodzącej przez B równoległej do AC z odpowiednio dwusieczną zewnętrzną kąta BAC i prostą przechodzącą przez C równoległą do AB. Wykazać, że $MD = ND$.

87. W trójkącie ABC kąt B jest rozwarty. Punkt F jest takim magicznym punktem boku AC, że $AF = BF$ i $\measuredangle FBC = \frac{\pi}{2}$. Punkty D i E są środkami odpowiednio boków AB i BC. Prosta przechodząca przez F równoległa do boku AB przecina prostą DE w punkcie G. Wykazać, że $\measuredangle GCB = \measuredangle ACD$.