# Druga klasóweczka

środa, 12 lutego 2003

**11.** Udowodnij, że jeśli $W(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych i $|W(3)| = |W(7)| = 1$, to $W(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

**12.** Znajdź wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek

$$P(x^2) = (P(x))^2.$$

**13.** Dane są liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$. Udowodnij, że istnieje taki niezerowy ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_{11})$ o wyrazach ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$, że liczba $x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_{11}a_{11}$ jest podzielna przez 2003.

**14.** Rozstrzygnij, czy każdą liczbę wymierną dodatnią można przedstawić w postaci

$$\frac{a^2 + b^3}{c^5 + d^7},$$

gdzie $a, b, c, d$ są liczbami całkowitymi dodatnimi.

**15.** Dwusieczna kąta $BAC$ trójkąta $ABC$ przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie $D$ różnym od $A$. Punkty $K$ i $L$ to rzuty odpowiednio punktów $B$ i $C$ na prostą $AD$. Udowodnij, że

$$AD \geq BK + CL.$$