Zadania drugoetapopodobne

piątek, 11 luty 2005

101. Wykazać, że dla dowolnego całkowitego dodatniego n istnieje liczba całkowita dodatnia x podzielna przez 5^n o n cyfrach w zapisie dziesiętnym, w którym wszystkie cyfry są nieparzyste.

102. Dany jest ciąg S_1 liczb całkowitych nieujemnych $a_0, a_1, \ldots, a_n$ spełniający $a_i \leqslant i$ dla każdego $0 \leqslant i \leqslant n$. Ciąg S_{k+1} otrzymujemy z ciągu S_k w sposób następujący: i-ty wyraz ciągu S_{k+1} jest równy liczbie wyrazów o indeksie mniejszym niż i w ciągu S_k różnych od wyrazu i-tego w ciągu S_k. Wykazać, że $S_n = S_{n+1}$.

103. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z zachodzi nierówność

$$\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2} + \frac{(x+2y+z)^2}{2y^2+(z+x)^2} + \frac{(x+y+2z)^2}{2z^2+(x+y)^2} \leqslant 8.$$

104. W trójkącie ABC punkt D leży na boku AC, a punkt E na boku BC, przy czym na czworokącie $ADEB$ da się opisać okrąg. Proste DE i AB przecinają się w punkcie F, proste CF i BD w punkcie M. Wykazać, że M jest środkiem odcinka CF wtedy i tylko wtedy, gdy $MC^2 = MB \cdot MD$.

105. Dana jest szachownica $n \times n$, niektóre jej pola są niebieskie, inne czerwone. Każde pole niebieskie ma co najmniej jednego sąsiada czerwonego. Z każdego pola czerwonego można się dostać do każdego innego czerwonego idąc po czerwonych polach. Uznajemy, że pola sąsiadują tylko bokami. Wykazać, że pól czerwonych jest co najmniej $\frac{n^2-2}{3}$.

106. Dany jest czworokąt wpisany w okrąg o bokach a, b, c, d i przekątnych e, f. Wykazać, że

$$|a-c| + |b-d| \geqslant 2|e-f|.$$

107. Joasia i Onufry grają w grę na szachownicy 1×2000. Na początku każde pole jest puste. Ruch polega na wpisaniu w kratkę litery S lub O. Kto otrzyma spójny napis SOS, wygrywa. Gdy nie można wykonać już ruchu, następuje remis. Wykazać, że Onufry zawsze może wygrać.

108. $n > 1$ jest liczbą naturalną, zaś p jest liczbą pierwszą, przy czym $p \mid n^3 - 1$ i $n \mid p - 1$. Wykazać, że liczba $4p - 3$ jest kwadratem liczby całkowitej.

109. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ w którym $BC \| AD$, punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkt F jest takimi punktem dwusiecznej kąta BDC, że $IF \perp BC$. Okrąg opisany na trójkącie CFD przecina prostą BC w punktach C i E. wykazać, że trójkąt DEF jest równoboczny.